UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

ESCUELA DE POSGRADO
SECCIÓN DE MAESTRÍA

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE
MAGISTER EN CIENCIAS

CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

Lic. FABIAN INGA YOVERA

PIURA-PERÚ

3 de agosto de 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

ESCUELA DE POSGRADO
SECCIÓN DE MAESTRÍA

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

APROBADA EN CONTENIDO Y ESTILO POR:

Lic. José del Carmen Silva Mechato M.Sc.
PRESIDENTE

Lic. Edgar Johny Ojeda Mauriola M.Sc.
SECRETARIO

Lic. María Isabel Hidalgo Tinedo M.Sc.
VOCAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

ESCUELA DE POSGRADO

SECCIÓN DE POSGRADO EN MATEMÁTICA APLICADA

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

TESIS

ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

LOS SUSCRITOS DECLARAMOS QUE EL PRESENTE TRABAJO DE TESIS ES ORIGINAL, EN SU CONTENIDO Y FORMA

Lic. Fabian Inga Yovera
EJECUTOR

Dr. Ricardo Velezmoro León
ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA
Escuela de Posgrado

ACTA DE SUSTENTACIÓN

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

Los Miembros del Jurado Calificador que suscriben, reunidos para la sustentación de la Tesis, para optar el Grado Académico de Magister en **MATEMÁTICA APLICADA.** Presentada por:

INGA YOVERA – FABIÁN

Con el asesoramiento del DR. RICARDO VELEZMORO LEÓN, denominada:

"ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES"

Oídas las respuestas y absueltas las observaciones formuladas, se declara:

APROBADO				DESAPROBADO
Excelente	*Sobresaliente*	*Bueno*	*Aceptable*	
✓				

En consecuencia, previa aprobación del Art.º 83, del Reglamento General de la Escuela de Posgrado, queda en condiciones de ser calificado **APTO** para obtener el Grado Académico de **MAGISTER EN MATEMÁTICA APLICADA.** De conformidad con lo estipulado en la ley.

PIURA, VIERNES 25DE AGOSTO DEL 2017.

M.Sc. JOSE DEL CARMEN SILVA MECHATO
PRESIDENTE

M.Sc. EDGAR JOHNY OJEDA MAURIOLA
SECRETARIO

M.Sc. MARIA ISABEL HIDALGO TINEDO
VOCAL

Esquina Jr. Tacna / Jr. Apurimac, Apartado Postal 295 - Telf.: 073-3328834 - E-mail: postgrado@unp.edu.pe
http://www.unp.edu.pe/unp/postgrado - Piura - PERU

Dedicatoria

Dedico este trabajo a Dios por su infinito amor y misericordia a lo largo de mi vida. A mis padres y hermanos que durante todo este tiempo me han brindado su apoyo y confianza en este largo camino. Gracias a las personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron listas para brindarme toda su ayuda, ahora me toca regresar un poquito de todo lo inmenso que me han otorgado. Con todo mi cariño está tesis se las dedico a ustedes. . .

Mis padres Felipe y Alejandrina.

Mi hermanos Pascual, Percy, Luis, Irma y Hermelinda.

Mis sobrinos Imeldy, Nilson, Aarón y Luana.

Agradecimientos

Es propicia la oportunidad para expresar mi agradecimiento a: Dios, quien es el dador de la vida, inteligencia y sabiduría que el hombre posee. A todos los profesores de la Escuela de matemáticas que con su aporte intelectual me guiaron por el camino del estudio y superación, en especial al profesor y asesor Dr. Ricardo Velezmoro León por su invaluable asesoría en la dirección de este trabajo de tesis y también agradecerle al profesor y amigo Lic. Robert Ipanaqué Chero por compartir su experiencia y conocimientos.

Resumen

En el presente trabajo se estudia la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales con coeficientes constantes, para ello se analizan algunas funciones especiales como la función Gamma, Psi, Beta, Mittag-Leffler y Miller-Ross; se define la integral y derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, se da una interpretación geométrica y física de la integral fraccionaria utilizando la integral de Riemann-Stieltjes y una interpretación física de la derivada fraccionaria. También se presenta la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria útil para solucionar ecuaciones diferenciales fraccionarias usando como primer método de solución la transformada de Laplace. Finalmente se proporcionan dos métodos adicionales para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales con coeficientes constantes: el método de soluciones linealmente independientes y el método de la representación explícita de la solución.

Palabras Claves: Integral Fraccionaria, Derivada Fraccionaria, Integral de Riemann-Stieltjes, Transformada de Laplace, Ecuación Diferencial Fraccionaria.

Abstract

In this paper we study the solution of linear fractional differential equations with constant coefficients. We analyze some special functions such as Gamma, Psi, Beta, Mittag-Leffler and Miller-Ross; The Riemann-Liouville fractional integral and derivative is defined, a geometric and physical interpretation of the fractional integral is given using the Riemann-Stieltjes integral and a physical interpretation of the fractional derivative. We also present the Laplace transform of the fractional derivative useful to solve fractional differential equations using Laplace transform as the first method of solution. Finally, two additional methods are provided for solving linear fractional linear equations with constant coefficients: the linearly independent solution method and the explicit solution representation method.

Keywords: Fractional Integral, Fractional Derivative, Riemann-Stieltjes Integral, Laplace Transform, Fractional Differential Equation.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Abreviaturas

RL	**R**iemann-**L**iouville
RS	**R**iemann-**S**tieltjes
EDF	**E**cuaciones **D**iferenciales **F**raccionarias

Símbolos

${}_aI_x^{\alpha}$	Integral fraccionaria de Riemann-Liouville
${}_aD_x^{\alpha}$	Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville
$\Gamma(z)$	Función Gamma
γ	Constante de Euler
$\psi(z)$	Función Psi
$\mathrm{B}(x,y)$	Función Beta
$\mathrm{E}_{\alpha}(t)$	Función de Mittag-Leffer de un parámetro
$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(t)$	Función de Mittag-Leffer de dos parámetros
$\mathscr{L}$	Transformada de Laplace
$\mathscr{E}_t(v,a)$	Función de Miller-Ross

Introducción

El Cálculo Fraccionario generaliza las ideas del cálculo clásico, es decir, la integración y diferenciación de orden entero a orden no entero. El concepto de derivada fraccionaria apareció por primera vez en una famosa correspondencia entre G. A. de L'Hospital y G. W. Leibniz, en 1695.

En los últimos sesenta años, el cálculo fraccionario ha jugado un papel muy importante en diversos campos como la física, química, mecánica, electricidad, la biología, la economía, la teoría de control, procesamiento de señales e imágenes, biofísica, fenómenos de flujo de sangre, aerodinámica, ajuste de los datos experimentales, etc.

En la última década, el cálculo fraccionario ha sido reconocida como una de las mejores herramientas para describir los procesos de memoria larga, difusión anómala, interacciones de largo alcance, comportamientos a largo plazo, leyes de potencia, leyes de escala alométrica, etc.(Yong, Jinrong, y Lu, 2016)

Tales modelos son interesantes no solo para los ingenieros y los físicos, sino también para los matemáticos puros.

Por lo tanto, los modelos matemáticos correspondientes son ecuaciones diferenciales fraccionarias. Sus evoluciones se comportan de una manera mucho más complicada para estudiar la dinámica correspondiente es mucho más difícil. Aunque los teoremas de la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias pueden ser obtenidos de forma similar, no toda la teoría clásica de la ecuación diferencial puede aplicarse directamente a las ecuaciones diferenciales fraccionarias.(Yong y cols., 2016)

Muchos matemáticos han desarrollado aún más esta área y se pueden mencionar los estudios de L. Euler (1730), J.L. Lagrange (1772), P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823), J. Liouville (1832), B. Riemann (1847), H.L. Greer (1859), H. Holmgren (1865), A.K. Grünwald (1867), A.V. Letnikov (1868), N.Ya. Sonin (1869), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy and J.E. Littlewood (1917), H. Weyl (1919), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924), A. Zygmund (1935), E.R. Love (1938), A. Erdélyi (1939), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949) and W. Feller (1952).(Yong y cols., 2016)

Por lo tanto el objetivo principal de ésta investigación es resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales con coeficientes constantes. Para la mejor comprensión y desarrollo de este trabajo, se ha tomado en consideración tres capítulos.

En el capítulo I se define la integral de Riemann-Stieltjes, se analizan algunas funciones especiales, como la función Gamma, Psi, Beta, las funciones de Mittag- Leffler de uno y dos parámetros y la función de Miller-Ross.

En el capítulo II se desarrolla una breve historia sobre el cálculo fraccionario, se define la integral y derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y propiedades, una interpretación geométrica y física de la integral fraccionaria utilizando la integral de Riemann-Stieltjes, además una interpretación física de la derivada fraccionaria. También se presenta la transformada de Laplace de la integral y derivada fraccionaria y la transformada de Laplace de las funciones trascendentes tales como Mittag-Leffler y Miller-Ross.

En el capítulo III se presenta la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales con coeficientes constantes utilizando el método de la transformada de Laplace, luego el método de soluciones linealmente independientes, el método de la representación explícita de la solución y finalmente como anexo se hará uso del software científico MATHEMATICA 10.0. para visualizar el cálculo de derivadas e integrales fraccionarias cuyo parte operativa resulta muy compleja.

Capítulo1

Nociones Preliminares

En este capítulo se establecerán los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral de orden clásico o entero, así como las ecuaciones diferenciales ordinarias, y funciones especiales, en particular, se presentan las funciones Gamma, Beta, Mittag-Leffler, Miller-Ross, los cuales serán utilizados para entender los conceptos fundamentales que servirán como base para el desarrollo de este trabajo. Estas funciones tienen un papel significativo en la teoría del cálculo fraccionario, especialmente, en la teoría de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

1.1. Integración y Diferenciación

La integración y diferenciación de orden entero están estrechamente relacionados por el conocido Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Clásico.

Teorema 1.1. ***Segundo Teorema Fundamental del Cálculo***

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua, y sea* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Entonces, F *es diferenciable y*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Por lo tanto tenemos una relación muy estrecha entre los operadores diferenciales y operadores integrales. Es uno de los objetivos de cálculo fraccionario para retener esta relación en un sentido adecuadamente generalizada. Por lo tanto, también hay una necesidad de tratar con operadores integrales fraccionarios, y realmente resulta ser útil discutir a esta primera antes de que a los operadores diferenciales fraccionarios. Por eso es conveniente utilizar las convenciones de notación introducidas en la siguiente definición.

Definición* 1.1*. **(a)** Denotaremos por D al operador que transforma una función diferenciable en su derivada, es decir, $Df(x) = f'(x)$.

(b) Se denotará por ${}_aI_x$ al operador que transforma una función f, asumiendo que es Riemann integrable sobre el intervalo $[a,b]$, en su primitiva centrado en a, por ${}_aI_x f(x) = \int_a^x f(t)dt$, para $a \leq x \leq b$.

(c) Para $n \in \mathbb{N}$ se utilizan los símbolos D y ${}_aI_x$ para denotar la n-ésima iteración de D y ${}_aI_x$ respectivamente, es decir, $D^1 = D, {}_aI_x^1 = {}_aI_x$, y $D^n = DD^{n-1}$ y ${}_aI_x^n = {}_aI_x {}_aI_x^{n-1}$, para $n \geq 2$.

(d) Teniendo en cuenta el teorema 1.1 se tiene que, $D_a I_x f = f$, lo que implica que

$$D^n {}_aI_x^n f = f, \tag{1.1.1}$$

para $n \in \mathbb{N}$, es decir D^n es el operador inverso por la izquierda de ${}_aI_x^n$.

Lema 1.1. *Sea f Riemann integrable en $[a, b]$. Entonces, para $a \leq x \leq b$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$${}_aI_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

Lema 1.2. *Sea $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$, y sea f una función que posee n-ésima derivada continua sobre el intervalo $[a, b]$. Luego, $D^n f = D^m {}_aI_x^{m-n} f$.*

Demostración. Por (1.1.1), tenemos $f = D^{m-n} {}_aI_x^{m-n} f$. Aplicando el operador D^n a ambos lados de esta relación y utilizando el hecho de que $D^n D^{m-n} = D^m$, se establece el lema. □

1.2. Espacio de Funciones

Introduciremos algunos espacios de funciones en los cuales la integral y derivada fraccionaria se encontrarán bien definidas.

***Definición* 1.2.** Sea $k \in \mathbb{N}$ y $p \geq 1$.

$$L_p[a,b] := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R};\ \text{es medible sobre } [a,b] \text{ y } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

$$C^k[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}; f \text{ tiene k-ésima derivada continua} \},$$

$$C[a,b] := C^0[a,b],$$

$$AC[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}; f \text{ es absolutamente continua} \},$$

$$\Re(g)[a,b] := \big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}; f \text{ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a } g : [a,b] \to \mathbb{R},\ \text{la cual es monótona creciente} \big\}.$$

***Observación* 1.**

Donde, $L_p[a,b]$ es (para $1 \leq p \leq \infty$) el espacio usual de Lebesgue.

1.2.1. Fórmula de Leibniz para la derivada del producto de dos funciones

Teorema 1.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f, g \in C^n[a,b]$, entonces*

$$D^n [fg] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(D^k f \right) \left(D^{n-k} g \right) \tag{1.2.1}$$

1.3. Algunas identidades asociadas con expansiones de fracción parcial

Si $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es un polinomio cubico con ceros distintos α, β y γ la expansión en fracción parcial de $P^{-1}(x)$ es

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$$

donde $A^{-1} = DP(\alpha) = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$, $B^{-1} = DP(\beta) = (\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$, $C^{-1} = DP(\gamma) = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$. También $A+B+C = 0$ y $\alpha A+\beta B+\gamma C = 0$. Además $\alpha^2 A+\beta^2 B+\gamma^2 C = 1$ Una generalización de estas fórmulas es establecida en el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Sea*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = \prod_{j=1}^{n}(x-\alpha_j)$$

un polinomio de grado n cuyos ceros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todos distintos. Sea

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x-\alpha_k}$$

donde

$$A_k^{-1} = DP(\alpha_k) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(\alpha_k - \alpha_i),\ k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

es la expansión de la fracción parcial de $P^{-1}(x)$.

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^m A_k = 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n-2.$$

Un intento de generalizar el Teorema 1.3 cuando las raíces de $P(x) = 0$ no son distintas se vuelve muy complicado. Consideremos sólo el caso especial en el que P tiene r ceros simples, s ceros dobles, y t ceros triples.

Teorema 1.4. *Sea*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

un polinomio de grado n. P tiene r ceros simples, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, s ceros dobles $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}$; y t ceros triples, $\alpha_{r+s+1}, \ldots, \alpha_{r+s+t}$ (entonces $n = r + 2s + 3t$). Sea

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{k=1}^{r+s+t} \frac{B_k}{x - \alpha_k} + \sum_{k=1}^{s+t} \frac{C_k}{(x - \alpha_{r+k})^2} + \sum_{k=1}^{t} \frac{D_k}{(x - \alpha_{r+s+k})^3} \tag{1.3.1}$$

la expansión en fracción parcial de $P^{-1}(x)$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{r+s+t} \alpha_k^m B_k + m \sum_{k=1}^{s+t} \alpha_{r+k}^{m-1} C_k + \frac{1}{2} m(m-1) \sum_{k=1}^{t} \alpha_{r+s+k}^{m-2} D_k = 0, \tag{1.3.2}$$

para $m = 0, 1, 2, \ldots, n-2$.

Para polinomios con múltiples ceros se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{r+s+t} \alpha_k^{n-1} B_k + (n-1) \sum_{k=1}^{s+t} \alpha_{r+k}^{n-2} C_k + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \sum_{k=1}^{t} \alpha_{r+s+k}^{n-3} D_k = 1. \tag{1.3.3}$$

1.4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

***Definición* 1.3.** Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una o más variables. Si la función desconocida depende sólo de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas ordinarias) la ecuación se llama una ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, si la función desconocida depende de más de una variable(de tal modo que las derivadas son derivadas parciales) la ecuación se llama una ecuación diferencial parcial.(Spiegel y García, 1983)

1.4.1. Orden de una Ecuación Diferencial Ordinaria

***Definición* 1.4.** El orden de una ecuación diferencial ordinaria es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Teorema 1.5. ***Existencia y Unicidad***

Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

supóngase que f *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *son funciones continuas en un rectángulo* $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ *que contiene al punto* (x_0, y_0) *en su interior. Entonces el problema con valor inicial tiene una única solución* $\phi(x)$ *en algún intervalo* $]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[$*, donde* σ *es un número positivo.(Nagle, Saff, y Snider, 2001)*

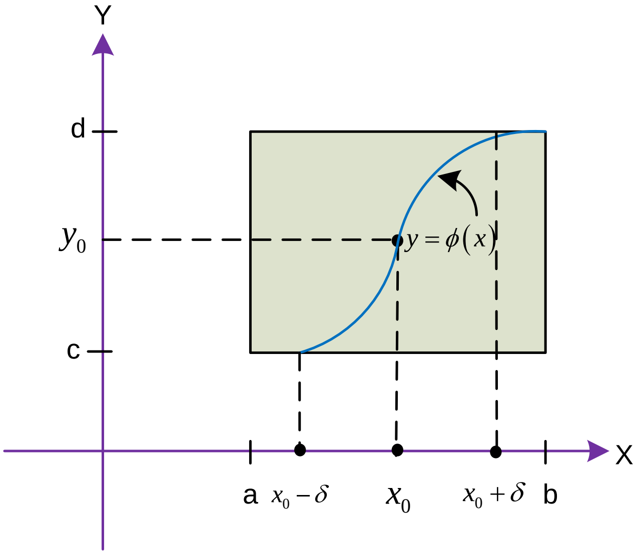


Figura 1.1: Diagrama para el teorema de existencia y unicidad.

***Observación* 2.**

Este teorema da las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de una solución, esto es, si las condiciones se cumplen, la existencia y unicidad están aseguradas. Sin embargo, las condiciones no son condiciones necesarias; esto es, si no se satisfacen todas las condiciones, puede que aún haya una solución única. Se debería notar que el teorema no nos dice cómo obtener esta solución.

1.4.2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

A las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de primer grado, expresaremos en la forma:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \tag{1.4.1}$$

La ecuación (1.4.1) nos indica la relación entre la variable independiente x, la variable dependiente y y su derivada $\frac{dy}{dx}$.

1.4.3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Homogéneas

***Definición* 1.5.** Diremos que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado en x e y.

Una ecuación que casi siempre puede transformarse en una ecuación con variables separables es

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.4.2}$$

y cualquier ecuación diferencial que es o se pueda escribir en esta forma se llama ecuación diferencial homogénea. Para cambiar (1.4.2) en una ecuación separable, usamos la transformación $y = ux$, esto es, el cambio de la variable dependiente de y a u manteniendo la misma variable independiente x.

1.4.4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales

***Definición* 1.6.** Una ecuación diferencial ordinaria lineal es una ecuación que puede ser escrita en la forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x) \tag{1.4.3}$$

donde $F(x)$ y los coeficientes $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ son funciones solo de x y $a_0(x)$ es diferente de cero.

1.4.5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden

Una ecuación que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1.4.4}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones solo de x, se llama ecuación diferencial lineal de primer orden en y. Si $Q(x) = 0$, la ecuación (1.4.4) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{1.4.5}$$

A la ecuación (1.4.5) llamaremos ecuación diferencial homogénea y es una ecuación diferencial de variable separable y su solución es:

$$y = ke^{-\int p(x)dx};\ k \in \mathbb{R}(\text{constante})$$

Si $Q(x) \neq 0$, la ecuación (1.4.4) se llama ecuación diferencial lineal no homogénea, cuya solución general es:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}\, Q(x)dx + c\right] \tag{1.4.6}$$

1.4.6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Orden n

***Definición* 1.7.** Una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la forma

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x) \tag{1.4.7}$$

donde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$, con frecuencia abreviados por $a_0, a_1, \ldots, a_n$, y $F(x)$ dependen solo de x y no de y.

Si $n = 1$, las ecuaciones (1.4.4) y (1.4.7) son equivalentes. Si $n = 2$, entonces (1.4.7) se convierte en

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \tag{1.4.8}$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Si todos los coeficientes $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$, en (1.4.7) son constantes, esto es, no dependen de x, la ecuación se llama ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Sin embargo, si no todos los coeficientes son constantes, la ecuación se llama ecuación diferencial lineal con coeficientes variables

1.4.7. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales Homogéneas de Coeficientes Constantes

Las ecuaciones diferenciales homogéneas de coeficientes constantes son de la forma:

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = 0 \tag{1.4.9}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes. Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales, primero se considera el polinomio característico de la siguiente forma:

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

Como el polinomio característico $P(r) = 0$ es de grado n entonces se puede obtener las siguientes raíces $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, los cuales pueden ser reales distintos, reales de multiplicidad o números complejos.

1.5. La integral de Riemann-Stieltjes

A continuación presentaremos la integral de Riemann-Stieltjes, concepto más general que la integral de Riemann. Esta integral incluye dos funciones f y g en lugar de una sola, y la integral de Riemann se presenta como un caso particular. Sin embargo la integral de Riemann-Stieltjes tiene sentido en el caso en que g no es diferenciable e incluso cuando no es continua. Las integrales de Riemann-Stieltjes permiten describir un conjunto de fenómenos más amplio que las integrales de Riemann. La integral de Riemann-Stieltjes, será usada para la interpretación geométrica y física de la integral y derivada fraccionaria.

***Definición* 1.8.** Sea $[a, b]$ un intervalo. Una partición P de $[a, b]$ es un conjunto de puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$; y sea g una función monótona creciente sobre $[a, b]$, tal que para cada partición P de $[a, b]$ se escribe,

$$\triangle g_i = g(x_i) - g(x_{i-1}).$$

Para alguna función real f acotada en el intervalo $[a, b]$, sea

$$M_i = \max\{f(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \;\; m_i = \min\{f(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

y sea el conjunto,

$$U(P, f, g) = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle g_i, \;\; y \;\; L(P, f, g) = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle g_i$$

existe un único número S tal que satisface la desigualdad,

$$L(P, f, g) \leq S \leq U(P, f, g),$$

para todas las particiones P de $[a, b]$, entonces S es llamado la **integral de Riemann-Stieltjes** (o simplemente integral de Stielijes) de f con respecto a g en $[a, b]$ y es denotada por,

$$\int_a^b f dg \;\; \text{o} \;\; \int_a^b f(x) dg(x).$$

Teorema 1.6. *Si f y $h \in \Re(g)[a, b]$, entonces $c_1 f + c_2 h \in \Re(g)[a, b]$ (para todo par de constantes c_1 y c_2) y se tiene*

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 h) dg = c_1 \int_a^b f dg + c_2 \int_a^b h dg.$$

Un importante teorema que relaciona la integral de Riemann con la integral de Stieltjes es el siguiente.

Teorema 1.7. *Sean $f \in \Re(g)[a,b]$, y $g \in C^1[a,b]$. Entonces la integral de Riemann*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

existe y se verifica

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Teorema 1.8. *(**Teorema de sustitución.**) Sea $f \in \Re(g)[a,b]$, y $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente monótona creciente diferenciable $\forall t \in [a,b]$, sea J un intervalo que contiene $g([a,b])$. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} (f \circ g^{-1})(t)dt.$$

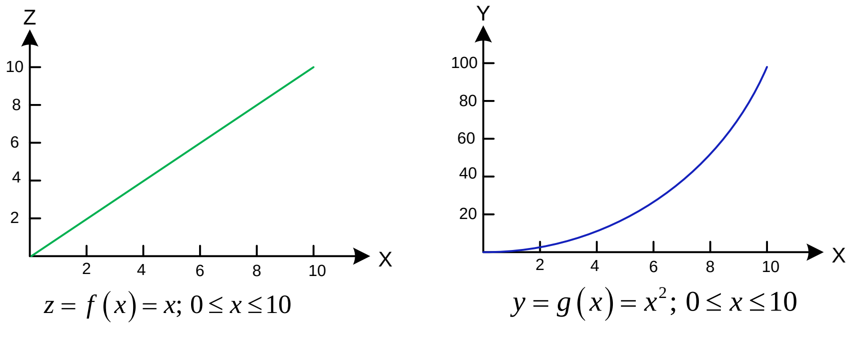
1.5.1. Interpretación geométrica de la integral de Riemann-Stieltjes

Ahora mostraremos una interpretación de la integral de Riemann-Stieltjes, la cual está basada en la tesis de (Rodríguez, 2010). Supóngase que se tiene una función $y = f(x)$, cuya representación gráfica es una curva; se conoce que una de las interpretaciones clásicas de la integral de Riemann es el área bajo dicha curva. En forma análoga, la integral de Riemann-Stieltjes, que es una generalización de la integral de Riemann, deberá tener una interpretación geométrica, que generalice la idea de área bajo la curva.

Sea $f \in \Re(g)[0,10]$, donde

$$f(x) = x, \text{ y } g(x) = x^2,$$

las cuales están representados en las Fig.1.2(a) y Fig.1.2(b) respectivamente.



(a) (b)

Figura 1.2: Representaciones geométricas de f y g en $\mathbb{R}^2$.

Considere ahora los conjuntos determinados por los valores de $x \in [0, 10]$ sobre el eje X, y los valores de las funciones $y = g(x)$ y $z = f(x)$ sobre el eje Y y Z respectivamente en $\mathbb{R}^3$ (ver Fig.1.3).

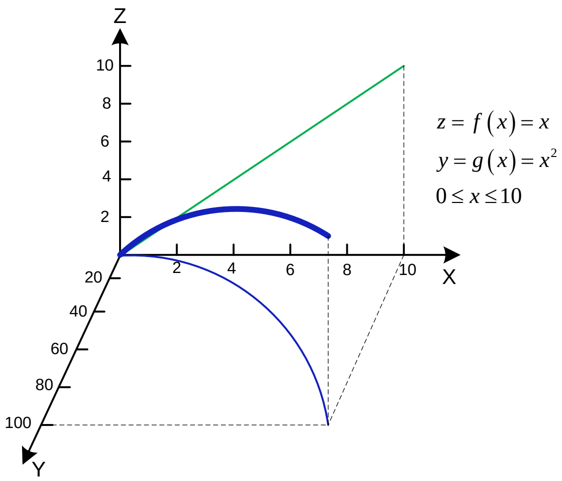


Figura 1.3: Representaciones geométricas del cerco $\mathcal{C}$, f y g en $\mathbb{R}^3$.

Para representar geométricamente la integral de Riemann-Stieltjes, es necesario definir los siguientes objetos.

***Definición* 1.9.** Se denomina cerco, respecto a las funciones f y g, al siguiente conjunto

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = g(x), z = f(x)(f \in \Re(g)[a, b])\}.$$

***Definición* 1.10.** Se denomina proyección lateral P_S, a la función

$$P_S : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (0, y, z).$$

La integral de Riemann-Stieltjes a lo largo de este cerco, suma el producto de las alturas representadas por los valores de $f(x)$ con $\triangle g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$ de Definición 1.8; esta suma de áreas llevadas al límite representa el área bajo la curva de la proyección lateral del cerco $P_S(x, g(x), f(x)) = (0, g(x), f(x)), x \in [a, b]$ (ver Fig.1.4).

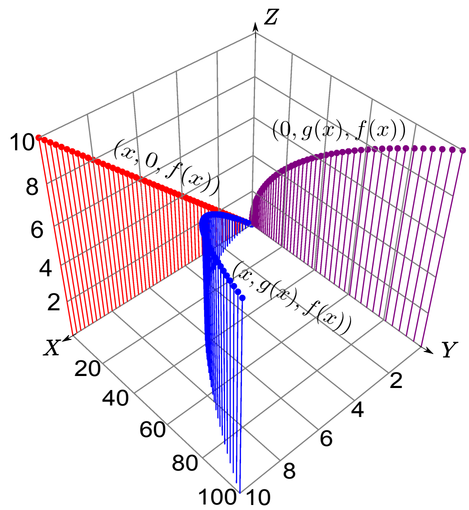
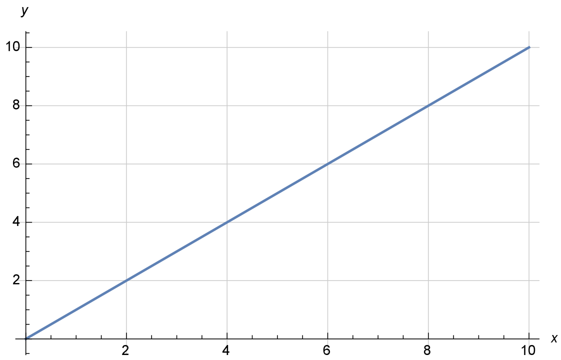
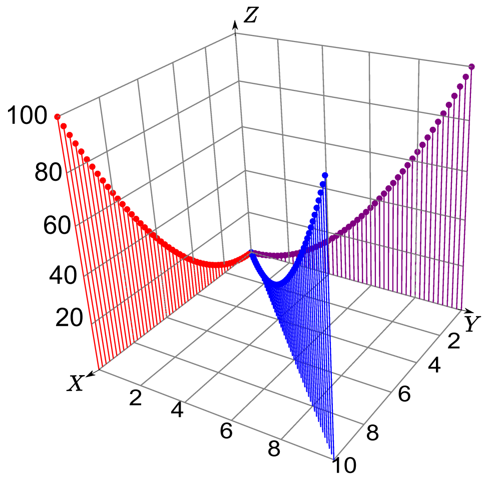


Figura 1.4: Proyección del Cerco, interpretación geométrica de la Integral de Riemann-Stieltjes.

Si $g(x) = x$, el área de la integral de Riemann-Stieltjes y Riemann coinciden (ver Fig.1.5); de esta forma la integral de Riemann-Stieltjes se reduce a la integral de Riemann.



(a)



(b)

Figura 1.5: Proyección del cerco $\mathcal{C}$, caso $g(x) = x$ y $f(x) = x^2$, con $x \in [0, 10]$.

Ahora, se calculará el valor de la integral de Riemann-Stieltjes para dichas funciones, en efecto

$$\int_0^{10} f(x)dg(x) = \int_0^{10} f(x)g'(x)dx = \int_0^{10} x \cdot 2xdx = \int_0^{10} 2x^2dx = \frac{2000}{3}u^2.$$

Sin hacemos el cambio de variable $x^2 = t$ (ver Teorema 1.8), en la integral anterior, se tiene

$$\int_0^{100} \sqrt{t}dt = \frac{2000}{3}u^2,$$

la cual representa la medida del área bajo la curva $\sqrt{x}$, $x \in [0, 100]$, en el plano YZ (ver Fig.1.4); es decir, la interpretación de la integral de Riemann-Stieltjes.

Por otro lado, $\int_0^{10} xdx = 50u^2$, es el valor de la integral de Riemann, en el plano XZ (ver Fig.1.4).

1.5.2. Interpretación física de la integral de Riemann - Stieltjes

Ahora mostraremos una interpretación física de la integral de Riemann-Stieltjes, la cual está basada en el artículo de (Podlubny, 2001).

Imagine un coche acondicionado con dos dispositivos para las medidas: El velocímetro registrando la velocidad $v(x)$, y el reloj que debe mostrar el tiempo x . El reloj, sin embargo, muestra el tiempo de forma incorrecta; supongamos que la relación entre el tiempo equivocado x, que muestra el reloj y el cuál el conductor considera como el tiempo correcto, y el verdadero tiempo T, se describe por la función $T = g_t(x)$. Esto quiere decir que donde el conductor "mide" el espacio de tiempo dx, el intervalo de tiempo real es dado por $dT = dg_t(x)$. El conductor **A**, que no sabe acerca de un funcionamiento erróneo del reloj, calculará la distancia recorrida como la integral clásica o de Riemann:

$$S_A(t) = \int_0^t v(x)dx.$$

Sin embargo, un observador **O**, conociendo que el reloj del coche muestra un tiempo incorrecto, y además conociendo la función $g_t(x)$, la cual corrige el tiempo incorrecto en el correcto, podrá calcular la distancia real recorrida como

$$S_O(t) = \int_0^t v(x)dg_t(x) = {}_0I_t^{\alpha}v(t). \tag{1.5.1}$$

Este ejemplo muestra que la integral Riemann-Stieltjes (1.5.1) puede interpretarse como la distancia real de pasar por un objeto en movimiento, para los que hemos registrado valores correctos de velocidad y valores incorrectos de tiempo x; la relación entre el tiempo de grabado erróneamente y el tiempo correcto T está dada por una función conocida $T = g_t(x)$.

1.6. Transformada de Laplace

***Definición* 1.11.** Sea $F(t)$, $t > 0$ dada. La transformada de **Laplace** de $F(t)$ se define como

$$f(s) = \mathscr{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

donde s es un parámetro real. El símbolo $\mathscr{L}$ se llama el operador de la transformada de Laplace.

1.6.1. Transformada de Laplace de la derivada

Teorema 1.9. *Sea $F(t)$ continua en $[0, \infty)$ y $F'(t)$ continua por partes en $[0, \infty)$, ambas de orden exponencial α. Entonces, para $s > \alpha$,*

$$\mathscr{L}\{F'(t)\} = s\mathscr{L}\{F(t)\} - F(0)$$

Teorema 1.10. *Sea $F(t)$ continua en $[0,\infty)$ y $F''(t)$ continua por partes en $[0,\infty)$, ambas de orden exponencial α. Entonces, para $s>\alpha$,*

$$\mathscr{L}\{F''(t)\} = s^2\mathscr{L}\{F(t)\} - sF(0) - F'(0)$$

1.6.2. Transformada de Laplace de derivadas en orden superior

Teorema 1.11. *Sea $F(t), F'(t), \ldots, F^{n-1}(t)$ continuas en $[0,\infty)$, y sea $F^n(t)$ continua por partes en $[0,\infty)$, con todas estas funciones de orden exponencial α. Entonces, para $s>\alpha$,*

$$\mathscr{L}\{F^n(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}f^{(k)}(0) = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0)$$

Las funciones $t^\mu(\mu>-1)$, e^{at}, $t^{\mu-1}e^{at}(\mu>0)$, $\cos at$, y $\sin at$ son de clase C y de orden exponencial. Por cálculo elemental tenemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t^\mu\right\} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}}, \quad \mu>-1 \\
\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} &= \frac{1}{s-a} \\
\mathscr{L}\left\{t^{\mu-1}e^{at}\right\} &= \frac{\Gamma(\mu)}{(s-a)^\mu}, \quad \mu>0 \\
\mathscr{L}\left\{\cos at\right\} &= \frac{s}{s^2+a^2} \\
\mathscr{L}\left\{\sin at\right\} &= \frac{a}{s^2+a^2}
\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

1.6.3. Transformada Inversa de Laplace

***Definición* 1.12.** Dada una función $F(s)$, si existe una función $f(t)$ que sea continua en $[0,\infty)$ y satisfaga $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces decimos que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y utilizamos la notación $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Ejemplo 1.1. *Determinar la transformada de Laplace inversa de* $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2-2s+5}$

***Solución* 1.1.** $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\} = e^t\cos 2t$

1.6.4. La Convolución

***Definición* 1.13.** Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas por partes en $[0,\infty)$. La convolución de $f(t)$ y $g(t)$, que se denota $f * g$, se define como

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du = \int_0^t g(t-u)f(u)du$$

Teorema 1.12. ***Teorema de la Convolución***

Sean $f(t)$ y $g(t)$ continuas por partes en $[0,\infty)$ y de orden exponencial α; sean $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$. Entonces

$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(t-u)g(u)du\right\} = \mathscr{L}\{f(t)\}.\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s).G(s)$$

1.7. Funciones Especiales

En esta sección presentaremos la teoría básica de algunas funciones especiales que serán usadas en este trabajo. En particular, presentaremos las funciones Gamma, Beta, Mittag-Leffler, Miller-Ross. Estas funciones tienen un papel significativo en la teoría del Cálculo Fraccionario, especialmente en la teoría de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias.

1.7.1. Función Gamma

Una de las funciones básicas de cálculo fraccionario es la función Gamma de Euler, que generaliza el factorial de un número n, $n > 0$ y permite tener en cuenta números no enteros.

***Definición* 1.14.** La función $\Gamma : \langle 0, \infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.7.1}$$

se llama función gamma de Euler.

1.7.2. Constante de Euler(γ)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right\} \approx 0.57721566490153286060651 2. \tag{1.7.2}$$

Propiedades:

1. Sea $z > 0$, entonces

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

2.

$$\Gamma(z) = (z-1)(z-2)\cdots(z-r)\Gamma(z-r) \tag{1.7.3}$$

3.

$$\binom{-z}{n} = \frac{\Gamma(1-z)}{n!\Gamma(1-z-n)} = (-1)^n\frac{\Gamma(z+n)}{n!\Gamma(z)} = (-1)^n\binom{z+n-1}{n} \tag{1.7.4}$$

4. La función gamma puede ser representada por el límite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z\,(z+1)\,(z+2)\cdots(z+n)},\ z \neq 0, -1, -2, \cdots$$

La representación gráfica de la función Gamma es dada en la fig.1.6.

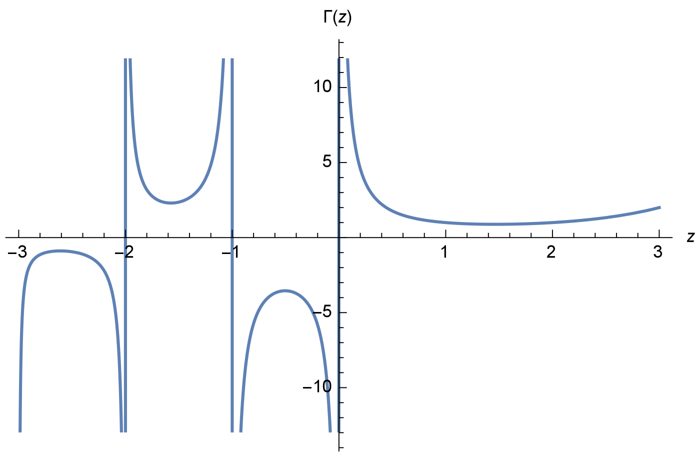


Figura 1.6: La función Gamma

Fuente: Propia del autor

1.7.3. La fórmula de multiplicación para la función gamma

$$\Gamma(mz) = (2\pi)^{\frac{1-m}{2}} m^{mz-\frac{1}{2}} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right),\ m = 1,2,\cdots \quad (1.7.5)$$

Para m = 2 se obtiene la fórmula de la duplicación de la función gamma, es decir:

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{\frac{1-2}{2}} 2^{2z-\frac{1}{2}} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \quad (1.7.6)$$

Por ejemplo:

$$1 = \Gamma(1) = \Gamma\left[2\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{1-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

1.7.4. Función Psi

La función Psi de Euler es definido como la derivada del logaritmo de la función Gamma:

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d}{dz}\Gamma(z),\ (z \in \mathbb{C}) \quad (1.7.7)$$

Tomando logaritmos y diferenciando se puede obtener muchas propiedades para la función Psi de las propiedades correspondientes de la función Gamma. Por ejemplo, a partir de (1.7.3) tenemos

$$\psi(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} + \cdots + \frac{1}{z-r} + \psi(z-r) \quad (1.7.8)$$

Propiedades:

1. $\psi(z) = -\gamma - \dfrac{1}{z} + z \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(z+k)}$
2. $\psi(z) = -\gamma + (z-1) \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(k+1)(z+k)}$
3. $\psi(1) = -\gamma$
4. $\psi\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2$
5. $\psi(z+m) = \psi(z) + \sum\limits_{k=0}^{m-1} \dfrac{1}{z+k}$ $(z \in \mathbb{C}; m \in \mathbb{N})$.

   Para $m = 1$, se tiene:

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z} \ (z \in \mathbb{C}) \tag{1.7.9}$$

6. Sean $\alpha > -1$ y $\beta > -1$,

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{1-x} dx = \psi(\beta+1) - \psi(\alpha+1) \tag{1.7.10}$$

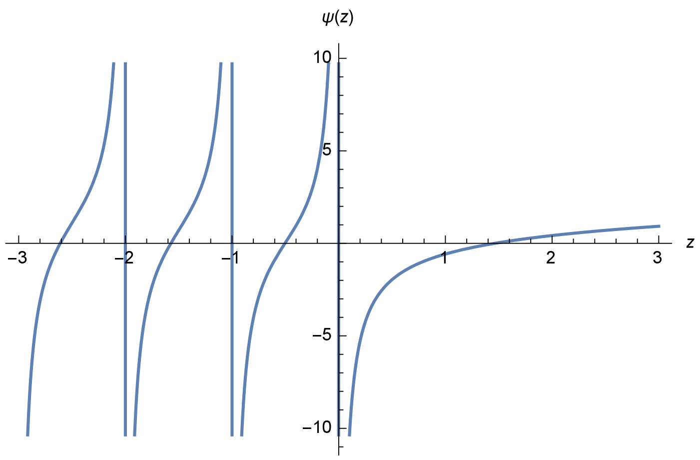


Figura 1.7: La función Psi

Corolario 1.1. *Sea m un entero positivo, entonces para cualquier x tal que $x > -(m+1)$, se tiene*

$$\psi(x+1) - \psi(x+1+m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k m!\Gamma(x+1)}{k(m-k)!\Gamma(x+1+k)}$$

1.7.5. Función Beta

En muchos casos, es más apropiado utilizar la denominada función Beta, en lugar de ciertas combinaciones de valores de la función Gamma.

***Definición* 1.15.** La función Beta, es la función $\mathrm{B} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\mathrm{B}\,(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x>0, \quad y>0. \tag{1.7.11}$$

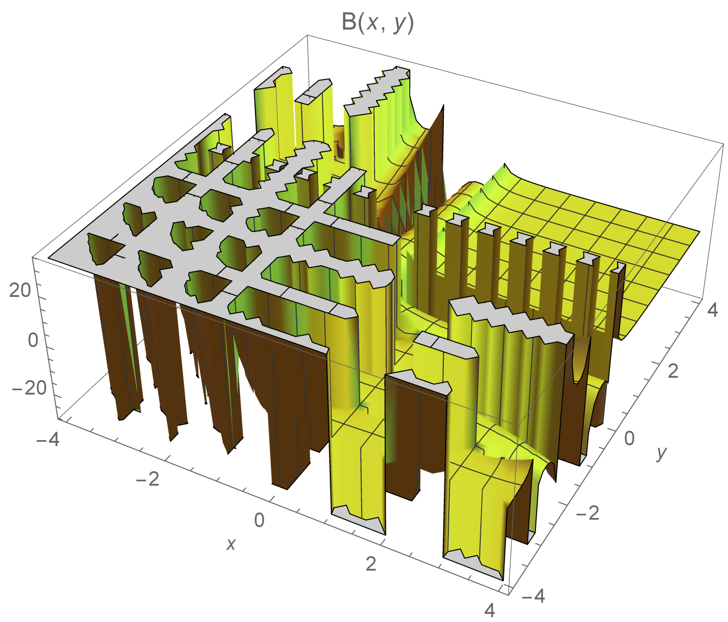


Figura 1.8: La función Beta

Para establecer la relación entre la función Gamma definida por (1.7.1) y la función Beta (1.7.11), se enuncia la siguiente propiedad.

Propiedad:

1. Sea $x > 0$ y $y > 0$, entonces

$$\mathrm{B}\left(x, y\right) = \frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right)}{\Gamma\left(x+y\right)}$$

1.7.6. Función de Mittag-Leffler

La función $\mathrm{E}_{\alpha}(t)$ se definió y estudió por Gösta Mittag-Leffler en el año 1903. Es una generalización directa de la serie exponencial. Para $\alpha = 1$ tenemos la serie exponencial, ha sido investigado por muchos autores, y tiene muchas aplicaciones. Su importancia se realiza durante las últimas décadas debido a su participación directa en los problemas de la física, la biología, la ingeniería y ciencias aplicadas. La función de Mittag-Leffler se produce de forma natural como la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. La función de Mittag-Leffler juega un papel importante en el estudio de los sistemas de orden fraccionario y se utiliza para expresar varios procesos físicos.

***Definición* 1.16. Función de Mittag-Leffler de un parámetro**

$$\mathrm{E}_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \ \alpha > 0. \tag{1.7.12}$$

La forma expandida en serie infinita es el siguiente:

$$\mathrm{E}_\alpha(t) = 1 + \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

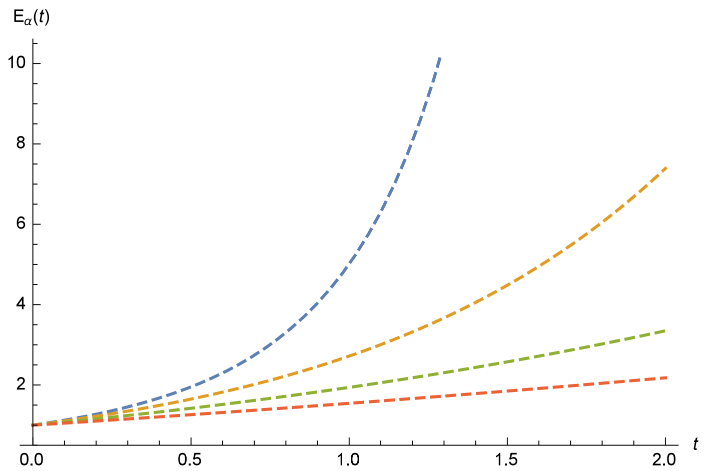


Figura 1.9: La función Mittag-Leffler de un parámetro para $\alpha = 0.5, 1, 1.5$ y 2

***Definición* 1.17. Función de Mittag-Leffler de dos parámetros**

La función de Mittag-Leffler de dos parámetros se define como:

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.7.13}$$

La función de Mittag-Leffler de dos parámetros juega un papel muy importante en el cálculo fraccionario. Este tipo de función se introdujo por RP Agarwal y Erdelyi, en 1953-1954.

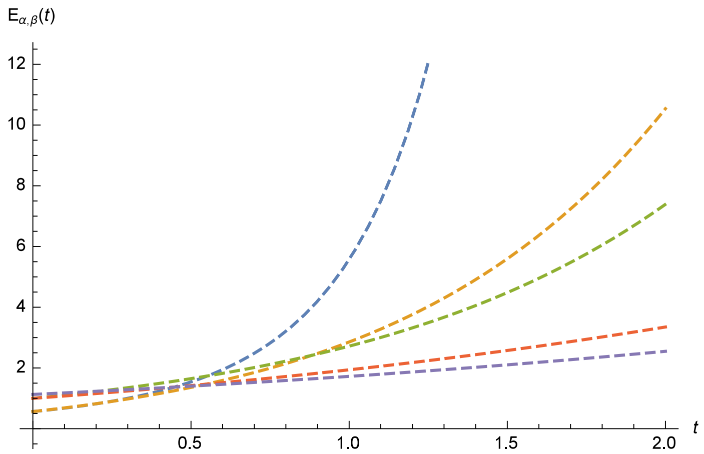


Figura 1.10: La función Mittag-Leffler de dos parámetros para $\alpha = 0.5, \beta = 0.5; \alpha = 1, \beta = 0.5; \alpha = 1, \beta = 1; \alpha = 1.5, \beta = 1$

Para $\beta = 1$ en (1.7.13), se tiene

$$\mathrm{E}_{\alpha,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \mathrm{E}_{\alpha}(\mathrm{t}).$$

A raíz de las identidades de la definición se tiene:

$$\mathrm{E}_{1,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

$$\mathrm{E}_{1,2}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$\mathrm{E}_{1,3}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+2)!} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$$

Generalizando se tiene:

$$\mathrm{E}_{1,m}(t) = \frac{1}{t^{m-1}}\left(e^t - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{t^k}{k!}\right),\ m = 1, 2, \ldots .$$

1.7.7. Transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler

1.7.7.1. Transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler de dos parámetros

$$\mathscr{L}\left\{t^{\beta-1}\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})\right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+\lambda},\quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.7.14}$$

1.7.7.2. Transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler de un parámetro

$$\mathscr{L}\left\{\mathrm{E}_{\alpha}(\mp\lambda t^{\alpha})\right\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}\pm\lambda},\quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.7.15}$$

1.7.8. Función de Miller-Ross

Otra función que generaliza la función exponencial es la función llamada Miller- Ross, creado por Kenneth y Bertram Ross, pero algunos libros también lo denominan función de Miellin-Ross. Miller y Ross en 1993 introdujeron una función como la base de la solución de un problema de valor inicial de orden fraccionario. Esta función es importante para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias.

***Definición* 1.18.** Sea $t \in \mathbb{R}$, $v > -1$ y $a \in \mathbb{R}$, la función Miller-Ross se define por

$$\mathscr{E}_t(v, a) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(v+k+1)} \tag{1.7.16}$$

La función de Mittag-Leffler de un parámetro se puede expresar en términos de la función de Miller-Ross:

$$\mathrm{E}_\alpha(ct^\alpha) = \sum_{k=0}^{q-1} c^k \mathscr{E}_t(k\alpha, c^q) \tag{1.7.17}$$

También se tiene

$$\mathscr{E}_t(v, a) = t^v \mathrm{E}_{1,v+1}(at) \tag{1.7.18}$$

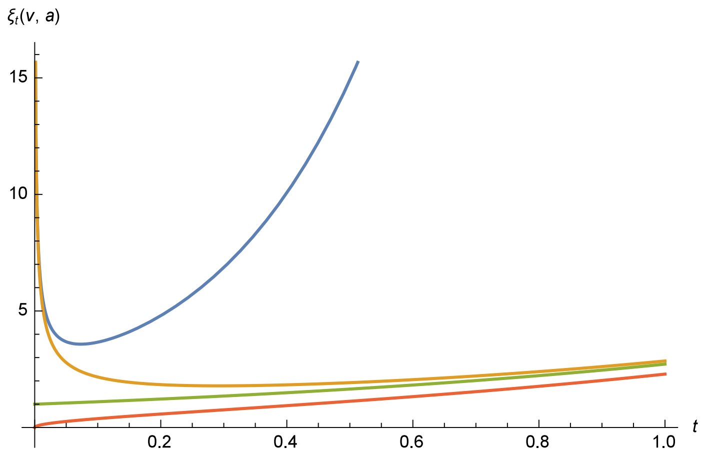


Figura 1.11: La función de Miller-Ross, para $v = -0.5$,0,0.5, $a = 4, 1$ y $0 \leq t \leq 1$

1.7.8.1. Valores especiales de la función de Miller-Ross

$$\mathscr{E}_t(0, a) = e^{at} \tag{1.7.19a}$$

$$\mathscr{E}_0(v,a) = 0,\ Re(v) > 0 \tag{1.7.19b}$$

$$\mathscr{E}_t(-1,a) = a\mathscr{E}_t(0,a) \tag{1.7.19c}$$

$$\mathscr{E}_t(-p,a) = a^p\mathscr{E}_t(0,a), \quad p = 0,1,2,\ldots \tag{1.7.19d}$$

$$\mathscr{E}_t(1,a) = \frac{\mathscr{E}_t(0,a) - 1}{a} \tag{1.7.19e}$$

$$\mathscr{E}_t(-1/2,a) = a\mathscr{E}_t(1/2,a) + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \tag{1.7.19f}$$

$$\mathscr{E}_t(v,0) = \frac{t^v}{\Gamma(v+1)} \tag{1.7.19g}$$

1.7.8.2. Relaciones recursivas de la función de Miller-Ross

$$\mathscr{E}_t(v,a) = a\mathscr{E}_t(v+1,a) + \frac{t^v}{\Gamma(v+1)} \tag{1.7.20a}$$

$$\mathscr{E}_t(v,a) = a^p\mathscr{E}_t(v+p,a) + \sum_{k=0}^{p-1} a^k \frac{t^{v+k}}{\Gamma(v+k+1)},\ p = 0,1,2,\ldots \tag{1.7.20b}$$

$$\mathscr{E}_t(v,a) - \mathscr{E}_t(v,b) = a\mathscr{E}_t(v+1,a) - b\mathscr{E}_t(v+1,b) \tag{1.7.20c}$$

$$\mathscr{E}_t(v,a) - \mathscr{E}_t(v,b) = a^p\mathscr{E}_t(v+p,a) - b^p\mathscr{E}_t(v+p,b) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(a^k - b^k)t^{v+k}}{\Gamma(v+k+1)},\ p = 0,1,2,\ldots \tag{1.7.20d}$$

1.7.8.3. Fórmulas de diferenciación de la función de Miller-Ross

$$D\mathscr{E}_t(v,a) = a\mathscr{E}_t(v,a) + \frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)} \tag{1.7.21a}$$

$$D\mathscr{E}_t(v,a) = \mathscr{E}_t(v-1,a) \tag{1.7.21b}$$

$$D^p\mathscr{E}_t(v,a) = \mathscr{E}_t(v-p,a),\ p = 0,1,2,\dots \tag{1.7.21c}$$

$$D^p\mathscr{E}_t(v,a) = a^p\mathscr{E}_t(v,a) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a^k t^{v+k-p}}{\Gamma(v+k+1-p)} \tag{1.7.21d}$$

$$D[t\mathscr{E}_t(v,a)] = t\mathscr{E}_t(v-1,a) + \mathscr{E}_t(v,a) \tag{1.7.21e}$$

$$D[t^\mu\mathscr{E}_t(v,a)] = t^\mu\mathscr{E}_t(v-1,a) + \mu t^{\mu-1}\mathscr{E}_t(v,a) \tag{1.7.21f}$$

$$D^p[t^\mu\mathscr{E}_t(v,a)] = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+1)} t^{\mu-k}\mathscr{E}_t(v+k-p,a),\ p = 0,1,2,\dots \tag{1.7.21g}$$

1.7.8.4. Representación Integral de la función de Miller-Ross

$$\mathscr{E}_t(v,a) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t \xi^{v-1} e^{a(t-\xi)} d\xi,\ Re(v) > 0 \tag{1.7.22}$$

1.7.8.5. Transformada de Laplace de la función de Miller-Ross

$$\mathscr{L}\{\mathscr{E}_t(v,a)\} = \frac{1}{s^v(s-a)}, \quad Re(v) > -1 \tag{1.7.23}$$

***Observación* 3.** Para valores $\alpha = 1$ en (1.7.12); $\alpha = 1$, $\beta = 1$ en (1.7.13); $v = 0$ en (1.7.16); se tiene a la función exponencial.

$$\mathrm{E}_1(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = e^{at}$$

$$\mathrm{E}_{1,1}(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = e^{at}$$

$$\mathscr{E}_t(0,a) = t^0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = e^{at}$$

$$\mathrm{E}_1(at) = \mathrm{E}_{1,1}(at) = \mathscr{E}_t(0,a) = e^{at}.$$

Capítulo2

Cálculo Fraccionario

2.1. Una breve historia del cálculo fraccionario.

El cálculo fraccionario es de tres siglos de antigüedad como el cálculo clásico, pero no es muy popular entre la comunidad científica. En una carta de fecha 30 de septiembre de 1695, L'Hopital escribió a Leibniz preguntándole por la notación particular que él ha usado en su publicación para la n-ésima derivada de una función

$$\frac{D^n f(x)}{Dx^n}$$

es decir, lo que sería el resultado si $n = 1/2$. La respuesta de Leibniz "una aparente paradoja de la que se extraerán consecuencias útiles algún día". En estas palabras nació el cálculo fraccionario. Está claro, que en el siglo XX, se han encontrado numerosas aplicaciones en particular. Sin embargo, estas aplicaciones y base matemática que rodean el cálculo fraccionario están lejos de ser paradójico. Si bien el significado físico es difícil de entender, las definiciones son más rigurosas que las de orden entero.

Más tarde se convirtió en la pregunta: ¿Puede n, ser cualquier número: fraccionario, irracional o complejo? Debido a que esta última pregunta fue respondida afirmativamente, el nombre de "cálculo fraccionario" se ha convertido en un nombre inapropiado y podría llamarse mejor "integración y diferenciación de orden arbitrario".

En 1812, P.S. Laplace definió una derivada fraccionaria de orden arbitrario aparecida en las escrituras de Lacroix (1819). Él desarrolló un ejercicio matemático generalizando de un caso de orden entero. Comenzando con $y = x^m$, dónde m es un número entero positivo, Lacroix fácilmente desarrolla la derivada n-ésima de:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

Empleando del símbolo de Legendre para el factorial generalizado (la función completa Gamma), Lacroix obtiene:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}.$$

Él entonces da un ejemplo para $y = x$ y $n = 1/2$, y obtiene:

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

Es interesante observar que el resultado de Lacroix coincide con el que se obtiene mediante la actual definición de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. Ésta expresión de Lacroix también se conoce como la fórmula de Euler (1730).(Das, 2011)

J. L. Lagrange(1849) contribuyó al cálculo fraccionario indirectamente. En 1772 él desarrolló la ley de exponentes (indices) para operadores diferenciales de orden entero y escribió:

$$\frac{d^m}{dx^m}.\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}y.$$

En la notación moderna el punto es omitido, pues no es una multiplicación. Más tarde, cuándo la teoría de cálculo fraccionario era desarrollado, los matemáticos tuvieron interés en saber qué restricciones tuvieron que ser impuestas en $y(x)$ a fin de que una regla análoga conserve su validez para m y n arbitrarios.

Joseph B. J. Fourier [1822] fue el siguiente en hablar de las derivadas de orden arbitrario. Su definición de operaciones fraccionarias fue obtenida de su representación integral de:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-\alpha)dp$$

y

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos p(x-\alpha) = p^n \cos\left[p(x-\alpha)+\frac{1}{2}n\pi\right]$$

para n un número entero. Reemplazando formalmente n por u (u arbitrario), obtiene la generalización

$$\frac{d^u}{dx^u}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos\left[p(x-\alpha)+\frac{1}{2}u\pi\right]dp.$$

Fourier afirma: “El número u que aparece en la fórmula anterior será considerado como cualquier cantidad que sea, positivo o negativo”.

Leibniz, Euler, Laplace, Lacroix, y Fourier hicieron mención de las derivadas de orden arbitrario, pero el primer uso de las operaciones de división fue hecha por Niels Henrik Abel en 1823. Abel aplica el cálculo fraccionario en la solución de una ecuación integral que surge en la formulación del problema de la tautocrona (es decir, el problema de determinar la forma de la curva de tal manera que el tiempo de descenso de un punto de masa sin fricción de deslizamiento hacia abajo de la curva bajo la acción de la gravedad es independiente del punto de partida). La ecuación integral de Abel es,

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t)dt$$

Entonces él operó en ambos lados de la ecuación anterior con $\dfrac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ para obtener

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x).$$

Este es un logro notable de Abel en el cálculo fraccionario. Es importante señalar que la derivada fraccionaria de una constante no es igual a cero. Es este hecho curioso que se encuentra en el centro de una controversia matemática. El tema de cálculo fraccionario estuvo inactivo durante casi una década hasta que las obras de Joseph Liouville aparecieron. P. Kelland comentó más adelante: “Nuestro asombro es grande, cuando se reflexiona sobre el momento de su primer anuncio para aplicaciones de Liouville”.

Los matemáticos han descrito solución de Abel como “elegante”. Tal vez fue la fórmula integral de Fourier y la solución de Abel que había atraído la atención de Liouville, que hizo el primer estudio importante de cálculo fraccionario. Liouville tuvo éxito en aplicar sus definiciones para los problemas en la teoría potencial. El punto de partida de Liouville para su desarrollo teórico fue el resultado conocido para derivadas de orden m de la exponencial:

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax},$$

que extiende de una manera natural a derivadas de orden v arbitrario

$$D^v e^{ax} = a^v e^{ax}.$$

Luego, asumió que la derivada de orden arbitrario de una función $f(x)$ que puede ser desarrollada una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x} \tag{2.1.1}$$

es

$$D^v f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x}$$

Esta fórmula es conocida como la primera fórmula de Liouville para una derivada fraccionaria. Se generaliza de forma natural la derivada de orden v arbitraria, donde v es cualquier número: racional, irracional, o complejo. Pero tiene la desventaja obvia de ser aplicable sólo para las funciones de la forma (2.1.1).(Miller y Ross, 1993)

Un reciente workshop internacional se realizó en la Universidad de Cankaya, Ankara en Turquía del 5 al 7 de Noviembre del 2008 (Baleanu, Güvenç, y Machado, 2010), en el cual se presentó los últimos avances en Cálculo Fraccionario tanto en teoría como en aplicaciones.

La primera obra, dedicado exclusivamente al tema de cálculo fraccionario, es el libro de Oldham y Spanier publicado en 1974. Uno de los trabajos más recientes sobre el tema de cálculo fraccionario es el libro de Podlubny publicado en 1999, que comprende sobre todo la ecuaciones diferenciales fraccionarias. Algunas de las últimas (pero ciertamente no el último) funciona especialmente en los modelos fraccionarios de la cinética anómala de procesos complejos son los volúmenes editados por Carpinteri y Mainardi en 1997 y por Hilfer en 2000, y el libro de Zaslavsky publicados en 2005, numerosas otras obras (libros, volúmenes editados, y actas de congresos) han aparecido también. Estos incluyen (por ejemplo) la monografía muy amplia de tipo enciclopédico por Samko, Kilbas y Marichev, que se publicó en Rusia en 1987 y en Inglés en 1993, y el libro dedicado esencialmente a las ecuaciones diferenciales fraccionarias por Miller y Ross, que fue publicado en 1993. (Kilbas, Srivastava, y Trujillo, 2006)

Actualmente es difícil encontrar un ámbito de la ciencia o de la ingeniería que no considere conceptos del cálculo fraccionario y, cada año tienen lugar varios acontecimientos que lo ponen de manifiesto (Sabatier, Agrawal, y Machado, 2007).

De relevante importancia son las aplicaciones físicas en la teoría de fluidos, viscoelasticidad, en el estudio del fenómeno de la difusión anómala y en la teoría electromagnética; pero podemos anticipar que también se va despertando un interés cada vez mayor en otros ámbitos muy distintos entre las cuales se puede considerar, la teoría de circuitos, de la biología, etc ver (Baleanu y cols., 2010), (Hilfer, 2000), (Kilbas y cols., 2006), (Podlubny, 2001) y (Sabatier y cols., 2007).

2.2. La derivada e integral fraccionaria

Este capítulo presenta las definiciones de dos operadores fraccionarios más usados. Mostramos algunas propiedades de estos operadores, además de interesante, son la base para el desarrollo del siguiente capítulo. Usaremos la notación ${}_aI_x^\alpha$ y ${}_aD_x^\alpha$ para denotar la integral y derivada fraccionaria de Riemann-Liouville respectivamente.

2.2.1. La Integral Fraccionaria

2.2.1.1. Integrales Iteradas

El primer argumento que daremos que conduce a una definición de la integral fraccionaria comienza con una consideración de las n-integrales iteradas.

$$ {}_aI_x^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(t)dt \tag{2.2.1} $$

Se supondrá que la función f en (2.2.1) es continua en el intervalo $[a, b]$, donde $b > x$. Afirmamos que (2.2.1) se puede reducir a una sola integral de la forma

$$ \int_a^x K_n(x,t)f(t)dt, \tag{2.2.2} $$

donde el núcleo $K_n(x,t)$ es una función de n, x, y t. Se demostrará que $K_n(x,t)$ existe incluso cuando n no es un entero positivo. Así definiremos ${}_aI_x^\alpha f(x)$ como

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \int_a^x K_n(x,t)f(t)dt \tag{2.2.3} $$

para todo α con $Re(\alpha) > 0$. Para probar esta conjetura comenzamos recordando que si $G(x,t)$ es uniformemente continua en $[a,b] \times [a,b]$, donde $b > x$, entonces de la teoría elemental de funciones tenemos

$$ \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} G(x_1,t)dt = \int_a^x dt \int_t^x G(x_1,t)dx_1. \tag{2.2.4} $$

Si, en particular,

$$ G(x_1,t) = f(t), $$

es decir, si $G(x_1,t)$ es una función solamente de la variable t, entonces (2.2.4) puede escribirse como

$$ \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt \int_t^x dx_1 = \int_a^x (x-t)f(t)dt. \tag{2.2.5} $$

Así hemos reducido la integral iterada dos veces a una sola integral. Si $n = 3$, entonces (2.2.1) se convierte en

$$ {}_aI_x^3 f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} f(t)dt = \int_a^x dx_1 \left[\int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} f(t)dt \right]. $$

Si aplicamos la identidad de (2.2.5) al par de integrales entre paréntesis, resulta

$$ {}_aI_x^3 f(x) = \int_a^x dx_1 \left[\int_a^x (x_1 - t) f(t) dt \right]. $$

Otra aplicación de (2.2.5) a la fórmula anterior conduce a

$$ {}_aI_x^3 f(x) = \int_a^x f(t)dt \int_t^x (x_1 - t) dx_1 = \int_a^x f(t) \frac{(x-t)^2}{2} dt $$

La iteración de este proceso n veces reduce (2.2.1) a (2.2.2), donde

$$ K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}. $$

Por lo tanto, podemos escribir ${}_aI_x^n f(x)$ como

$$ {}_aI_x^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \tag{2.2.6} $$

Claramente, el lado derecho de la expresión (2.2.6) existe para cualquier número n cuya parte real sea mayor que cero. Llamaremos

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad Re(\alpha) > 0 $$

la integral fraccionaria de f de orden α y denotada por el símbolo

$$ {}_aI_x^\alpha f(x). $$

2.2.1.2. La Integral Fraccionaria de Riemann-Louville

***Definición* 2.1.** Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se define la integral fraccionaria del tipo Riemann- Liouville de orden α de una función $f \in L_1[a,b]$ por

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,\ x > a \tag{2.2.7}$$

***Observación* 4.**

1. Es evidente que la integral fraccionaria de Riemann-Liouville coincide con la definición clásica de ${}_aI_x^\alpha$ en el caso cuando $\alpha \in \mathbb{N}$, excepto por el hecho de que hemos extendido el dominio de las funciones integrables de Riemann a las funciones integrables de Lebesgue.

2. Si $\alpha \geq 1$ es obvio que la integral fraccionaria (2.2.7) existe para todo $x \in [a,b]$ porque el integrando es el producto de una función integrable f y la función continua $(x-t)^{\alpha-1}$.

3. Si $0 < \alpha < 1$, la integral fraccionaria (2.2.7) impropia converge.

2.2.1.3. Existencia de la integral de orden fraccionario

A continuación consideraremos el problema de la existencia de la integral de orden fraccionario de una función. Supongamos que f es continua en $[0;\infty)$ y fijemos $\alpha; x > 0$. Si definimos la función

$$g(t) = -\frac{(x-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},\ \ 0 \leq t \leq x,$$

entonces

$$g'(t) = \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

y por lo tanto g es creciente en $[0; x]$. Entonces la integral fraccionaria se puede expresar como una **integral de Riemann-Stieltjes**:

$$_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \int_0^x f(t)dg(t).$$

La continuidad de f y la monotonicidad de g implica que esta integral existe para toda $x > 0$.

Ejemplo 2.1. *Calcule la integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de la función $f(x) = (x-a)^\mu$ con $\mu > -1$.*

***Solución* 2.1.** Sea $f(x) = (x-a)^\mu$, por la ecuación (2.2.7), se tiene:

$$\begin{aligned} _aI_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ _aI_x^\alpha (x-a)^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\mu dt \end{aligned}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$t - a = z \to dt = dz$$

$$t = a \to z = 0$$

$$t = x \to z = x - a$$

$$t - a = z \rightarrow t = z + a$$

$$-t = -z - a \rightarrow x - t = x - z - a$$

Luego

$${}_aI_x^\alpha (x-a)^\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} (x-z-a)^{\alpha-1} z^\mu dz = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} z^\mu (x-a-z)^{\alpha-1} dz$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$p = \frac{z}{x-a} \rightarrow p(x-a) = z \rightarrow dz = (x-a)dp$$

si $z = 0 \rightarrow p = 0$

si $z = x - a \rightarrow p = 1$

$$\begin{aligned}
{}_aI_x^\alpha (x-a)^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} z^\mu (x-a-z)^{\alpha-1} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left[p\,(x-a)\right]^\mu \left[(x-a) - p\,(x-a)\right]^{\alpha-1} (x-a)\, dp \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 p^\mu (x-a)^\mu \left[(x-a)\,(1-p)\right]^{\alpha-1} (x-a)\, dp \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 p^\mu (x-a)^\mu (x-a)^{\alpha-1} (1-p)^{\alpha-1} (x-a)\, dp \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 p^\mu (x-a)^{\mu+\alpha-1+1} (1-p)^{\alpha-1} dp \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\mu} \int_0^1 p^\mu (1-p)^{\alpha-1} dp \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\mu} \int_0^1 p^\mu (1-p)^{\alpha-1} dp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+\mu}\int_0^1 p^{\mu+1-1}(1-p)^{\alpha-1}dp \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+\mu}\mathrm{B}(\mu+1,\alpha) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+\mu}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(x-a)^{\alpha+\mu}
\end{aligned}$$

Luego,

$$ {}_aI_x^\alpha (x-a)^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(x-a)^{\alpha+\mu} \tag{2.2.8}$$

Ejemplo 2.2. *Calcular la integral fraccionaria de orden α, de la función $f(x) = x^\mu$, $\mu > -1$ y $\alpha > 0$.*

***Solución* 2.2.** Por la ecuación (2.2.7), se tiene:

${}_aI_x^\alpha f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$, y para $a=0$ se tiene

$$\begin{aligned}
{}_0I_x^\alpha x^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^\mu dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-xv)^{\alpha-1}(xv)^\mu x dv, \quad t = xv \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}x^\mu v^\mu x dv \\
&= \frac{x^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}v^\mu dv \\
&= \frac{\mathrm{B}(\mu+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}x^{\mu+\alpha}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+\alpha+1)} x^{\mu+\alpha}$$
$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} x^{\mu+\alpha}$$

$$ {}_0I_x^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} x^{\mu+\alpha}, \ \alpha > 0, \ \mu > -1, \ x > 0 \tag{2.2.9}$$

En particular, si $\mu = 0$, la integral fraccionaria de una constante K de orden α es

$$ {}_0I_x^\alpha K = \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha, \quad \alpha > 0$$

Ejemplo 2.3. *Calcule la integral fraccionaria de orden* $\alpha > 0$ *de la función* $f(x) = \ln x, \ x > 0$.

***Solución* 2.3.** Sea $f(x) = \ln x, \ x > 0$, por la definición (2.2.7), con $a = 0$ se tiene:

$$ {}_0I_x^\alpha \ln x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \ln t \, dt$$

Haciendo el cambio de variable:

$$t = zx \to dt = xdz$$

Si $t = x \to z = 1$

Si $t = 0 \to z = 0$

$$
\begin{aligned}
{}_0I_x^\alpha \ln x &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-zx)^{\alpha-1}\ln(zx)xdz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha-1+1}(1-z)^{\alpha-1}(\ln z+\ln x)dz \\
&= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}(\ln z+\ln x)dz \\
&= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ln xdz + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ln zdz \\
&= \frac{x^\alpha \ln x}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}dz + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ln zdz \\
&= -\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha).\alpha}\ln x(1-z)^\alpha \Big|_0^1 + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ln zdz \\
&= -\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\ln x(0-1) + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ln zdz
\end{aligned}
$$

$$
{}_0I_x^\alpha \ln x = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\ln x + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ln zdz \tag{2.2.10}
$$

Pero

$$
\int_0^1 z^{\mu-1}(1-z)^{\alpha-1}\ln zdz = \mathrm{B}(\mu,\alpha).[\psi(\mu)-\psi(\mu+\alpha)],\ \operatorname{Re}\mu>0, \operatorname{Re}\alpha>0 \tag{2.2.11}
$$

Para $\mu = 1$ en (2.2.11), se tiene:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ln zdz &= \mathrm{B}(1,\alpha).[\psi(1)-\psi(\alpha+1)] \\
&= \frac{\Gamma(1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}[-\gamma-\psi(\alpha+1)] \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}[-\gamma-\psi(\alpha+1)]
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ln zdz = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}[-\gamma-\psi(\alpha+1)] \tag{2.2.12}
$$

Reemplazando (2.2.12) en (2.2.10) se tiene:

$$\begin{aligned}
{}_0I_x^\alpha \ln x &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\ln x + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ln z dz \\
&= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\ln x + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}[-\gamma-\psi(\alpha+1)] \\
&= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln x-\gamma-\psi(\alpha+1)]
\end{aligned}$$

Luego

$$ {}_0I_x^\alpha \ln x = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln x-\gamma-\psi(\alpha+1)] \tag{2.2.13}$$

Si en particular $\alpha = 1/2$, entonces

$$\psi(3/2) = 2-\gamma-\ln 4$$

Entonces

$$\begin{aligned}
{}_0I_x^{1/2} \ln x &= \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)}[\ln x-\gamma-\psi(3/2)] \\
&= \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}[\ln x-\gamma-(2-\gamma-\ln 4)] \\
&= \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}[\ln x+\ln 4-2] \\
&= \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}[\ln 4x-2] \\
{}_0I_x^{1/2} \ln x &= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}[\ln 4x-2]
\end{aligned}$$

También

$$
{}_0I_x^{\alpha}(x^{\lambda}\ln x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)x^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}[\ln x + \psi(\lambda+1) - \psi(\lambda+\alpha+1)], \ \lambda > -1, \ \alpha > 0 \quad (2.2.14)
$$

cuando $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\lambda = -\frac{1}{2}$ en (2.2.14) se tiene

$$
\begin{aligned}
{}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}\ln x) &= \frac{\Gamma(1/2)x^{0}}{\Gamma(1)}[\ln x + \psi(1/2) - \psi(1)] \\
&= \sqrt{\pi}[\ln x + (-\gamma - \ln 4) - (-\gamma)] \\
&= \sqrt{\pi}[\ln x - \gamma - \ln 4 + \gamma] \\
&= \sqrt{\pi}\ln\frac{x}{4} \\
{}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}\ln x) &= \sqrt{\pi}\ln\frac{x}{4}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.4. *Calcule la integral fraccionaria de la función exponencial e^{ax}.*

***Solución* 2.4.**

$$
\begin{aligned}
{}_0I_x^{\alpha}e^{ax} &= {}_0I_x^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k{}_0I_x^{\alpha}\left(x^k\right)}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k\Gamma(k+1)}{k!}\frac{x^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} \\
&= x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kx^k}{\Gamma(\alpha+k+1)} \\
&= x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{\Gamma(\alpha+k+1)} \\
&= \mathscr{E}_x(\alpha,a) = x^{\alpha}\mathrm{E}_{1,1+\alpha}(ax), \ \text{aqui usamos(1.7.16) y (1.7.13)}
\end{aligned}
$$

Finalmente la integral fraccionaria de la función exponencial $\boldsymbol{e^{ax}}$ es

$$ {}_0I_x^{\alpha} e^{ax} = \mathscr{E}_x(\alpha, a) = x^{\alpha}\mathrm{E}_{1,1+\alpha}(ax) \tag{2.2.15} $$

2.2.2. Procedimiento útil para el cálculo integral fraccionario

El procedimiento es que tenemos para expresar la integral fraccionaria de una potencia de x, multiplicada por una función $f(x)$ en términos de la integral fraccionaria de $f(x)$, entonces por la definición (2.2.7), se tiene

$$ {}_aI_x^{\alpha}[xf(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t f(t)dt,\ \alpha > 0 \tag{2.2.16} $$

Haciendo $t = [x - (x - t)]$ y reemplazando en (2.2.16), se tiene

$$ \begin{aligned} {}_0I_x^{\alpha}[xf(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}[x-(x-t)]f(t)dt \\ &= \frac{x}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha} f(t)dt \\ &= \frac{x}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt - \frac{\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha} f(t)dt \\ &= \frac{x}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt - \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha} f(t)dt \\ &= x\ {}_0I_x^{\alpha} f(x) - \alpha\ {}_0I_x^{\alpha+1} f(x) \end{aligned} $$

$$ {}_0I_x^{\alpha}[xf(x)] = x\ {}_0I_x^{\alpha} f(x) - \alpha\ {}_0I_x^{\alpha+1} f(x). \tag{2.2.17} $$

Así que para

$$ {}_0I_x^{\alpha}[xe^{ax}] = x\, {}_0I_x^{\alpha} e^{ax} - \alpha\, {}_0I_x^{\alpha+1} e^{ax} = x\mathscr{E}_t(\alpha, a) - \alpha\mathscr{E}_t(\alpha+1, a) $$

La ecuación(2.2.17) puede generalizarse si una función se multiplica por x^p, donde p es entero no negativo, entonces

$$ {}_0I_x^{\alpha}[x^p f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}[t^p f(t)]dt, \ \alpha > 0 \tag{2.2.18} $$

y

$$ t^p = [x - (x-t)]^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} x^{p-k}(x-t)^k $$

Sustituyendo esta expresión en (2.2.18), obtenemos

$$ \begin{aligned} {}_0I_x^{\alpha}[x^p f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} x^{p-k} \int_0^x (x-t)^{\alpha+k-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \Gamma(\alpha+k) x^{p-k} {}_0I_x^{\alpha+k} f(x) \end{aligned} $$

$$ {}_0I_x^{\alpha}[x^p f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \Gamma(\alpha+k) x^{p-k} {}_0I_x^{\alpha+k} f(x) \tag{2.2.19} $$

Usando (1.7.4) y reemplazando en (2.2.19) se tiene

$$
\begin{aligned}
{}_0I_x^{\alpha}[x^p f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\Gamma(\alpha+k)x^{p-k}{}_0I_x^{\alpha+k}f(x)\\
&= \sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\frac{p!}{k!(p-k)!}x^{p-k}{}_0I_x^{\alpha+k}f(x)\\
&= \sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)k!}\frac{p!}{(p-k)!}x^{p-k}{}_0I_x^{\alpha+k}f(x)\\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{-\alpha}{k}\left[D^k x^p\right]\left[{}_0I_x^{\alpha+k}f(x)\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
{}_0I_x^{\alpha}[x^p f(x)] = \sum_{k=0}^{p}\binom{-\alpha}{k}\left[D^k x^p\right]\left[{}_0I_x^{\alpha+k}f(x)\right] \tag{2.2.20}
$$

Por ejemplo:

$$
{}_0I_x^{\alpha}[x^p e^{ax}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\Gamma(\alpha+k)x^{p-k}\mathscr{E}_t(\alpha+k,a) \tag{2.2.21}
$$

Para $p=2$ y reemplazando en (2.2.21), se obtiene

$$
\begin{aligned}
{}_0I_x^{\alpha}[x^2 e^{ax}] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{2}{k}\Gamma(\alpha+k)x^{2-k}\mathscr{E}_t(\alpha+k,a)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\binom{2}{0}\Gamma(\alpha)x^2\mathscr{E}_t(\alpha,a)-\binom{2}{1}\Gamma(\alpha+1)x\mathscr{E}_t(\alpha+1,a)\right.\\
&\left.+\binom{2}{2}\Gamma(\alpha+2)\mathscr{E}_t(\alpha+2,a)\right]\\
&= x^2\mathscr{E}_t(\alpha,a)-2x.\alpha\mathscr{E}_t(\alpha+1,a)+\alpha(\alpha+1)\mathscr{E}_t(\alpha+2,a)
\end{aligned}
$$

$$
{}_0I_x^{\alpha}[x^2 e^{ax}] = x^2\mathscr{E}_t(\alpha,a)-2x.\alpha\mathscr{E}_t(\alpha+1,a)+\alpha(\alpha+1)\mathscr{E}_t(\alpha+2,a)
$$

A continuación la siguiente tabla muestra la integral fraccionaria de algunas funciones elementales

Cuadro 2.1: Integrales fraccionarias de Riemann-Liouville, ${}_aI_x^\alpha f(x), \quad x > a$

Función $f(x)$	Integral fraccionaria /expresión
$(x-a)^\mu, x > a \geq 0, \mu > -1$	${}_aI_x^\alpha (x-a)^\mu = \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}(x-a)^{\mu+\alpha}$
$x^\mu, \quad x > a = 0, \mu > -1$	${}_0I_x^\alpha x^\mu = \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}x^{\mu+\alpha}$
$k, \ x > a = 0, \ k$(constante)	${}_0I_x^\alpha k = \dfrac{kx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$
$\ln x, \ x > a = 0$	${}_0I_x^\alpha \ln(x) = \dfrac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln x - \gamma - \psi(\alpha+1)]$
$x^\lambda \ln x, \ x > a = 0, \lambda > -1$	${}_0I_x^\alpha x^\lambda \ln x = \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}x^{\lambda+\alpha}$ $\times [\ln x + \psi(\lambda+1) - \psi(\lambda+\alpha+1)]$
$e^{\lambda x}, \ x > a = 0, \lambda > 0$	${}_0I_x^\alpha e^{\lambda x} = \mathscr{E}_x(\alpha, \lambda)$
e^x	${}_0I_x^{1/2} e^x = \mathscr{E}_x(1/2, 1)$
$\cos(\lambda x), \ x > a = 0$	${}_0I_x^{1/2} \cos(\lambda x) = \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}}\Big[\cos(\lambda x)C(z) + \sin(\lambda x)S(z)\Big]$
$\sin(\lambda x), \ x > a = 0$	${}_0I_x^{1/2} \sin(\lambda x) = \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}}\Big[\sin(\lambda x)C(z) - \cos(\lambda x)S(z)\Big]$
$x^{-1/2} \ln x$	${}_0I_x^{1/2} \left[x^{-1/2} \ln x\right] = \sqrt{\pi} \ln \dfrac{x}{4}$
$\ln x$	${}_0I_x^{1/2} \ln x = 2\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}(\ln 4x - 2)$
$x^{1/2} \ln x$	${}_0I_x^{1/2} \left[x^{1/2} \ln x\right] = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x \left(1 + \ln \dfrac{x}{4}\right)$

Donde: $z = \sqrt{\dfrac{2\lambda x}{\pi}}$, $C(z)$ y $S(z)$, son las integrales de **Fresnel** definidas como

$$C(z) = \int_0^z \cos \frac{1}{2}\pi x^2 dx \ \text{ y } \ S(z) = \int_0^z \sin \frac{1}{2}\pi x^2 dx$$

2.2.3. La derivada Fraccionaria

La derivada fraccionaria no es más que un operador que generaliza la derivada ordinaria, de tal manera que si la derivada está representado por el operador D^{α}, entonces, cuando $\alpha = 1$, que nos permite llegar de nuevo al operador diferencial ordinaria D. Como uno esperaría, desde que la derivada fraccionaria es una generalización de la derivada ordinaria, va a perder muchas de sus propiedades básicas; Por ejemplo, pierde su interpretación geométrica o física, la ley de exponentes (indices) es válido cuando se trabaja en espacios de funciones muy específicas, la derivada del producto de dos funciones es difícil de obtener, y la regla de la cadena no es sencillo de aplicar.(Baleanu y cols., 2010)

2.2.3.1. Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville

***Definición* 2.2.** Sea $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, y $\lceil \alpha \rceil = n$ el menor entero mayor que α. La derivada fraccionaria del tipo Riemann-Liouville de orden α de una función f, es definida mediante

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt; \quad n-1 \leq \alpha < n \tag{2.2.22} $$

La expresión (2.2.22), también se puede escribir de la siguiente forma

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[{}_aI_x^{n-\alpha} f(x) \right]; \; \alpha > 0 $$

***Observación* 5.** La derivada fraccionaria para casos enteros, coincide con la derivada usual. Cuando α es un número entero positivo, entonces $\alpha = n$, en efecto,

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^{\alpha} f(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left[{}_aD_x^{-(n-n)} f(x)\right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[{}_aD_x^{0} f(x)\right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n} f(x) \\
{}_aD_x^{\alpha} f(x) &= f^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

En consecuencia, se puede decir que la gran diferencia entre la derivada entera y la derivada fraccionaria es el núcleo de la integral $\dfrac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}$. Asimismo, se puede indicar que para calcular la derivada fraccionaria de una función f en un punto x, es necesario conocer los valores de la función f desde **a** hasta **x**, cuya información es acumulada a través del núcleo de la integral; para finalmente determinar la razón de cambio de dicha información.

Ejemplo 2.5. *Calcular la derivada fraccionaria de* $f(x) = (x-a)^{\mu}, x > 0.$

***Solución* 2.5.** Para determinar la derivada fraccionaria de esta función es necesario considerar el resultado de su integral fraccionaria obtenida en el ejemplo (2.1).

Luego por la definición de la derivada fraccionaria se tiene

$$
\begin{aligned}
{}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\mu}dt \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\mu}dt\right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[{}_aI_x^{n-\alpha}(x-a)^{\mu}\right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)(x-a)^{n-\alpha+\mu}}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha+\mu} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu-n+1)}(x-a)^{n-\alpha+\mu-n} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}(x-a)^{\mu-\alpha}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la derivada fraccionaria de la función $(x-a)^{\mu}$ es

$$
{}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}(x-a)^{\mu-\alpha} \tag{2.2.23}
$$

Ejemplo 2.6. *Calcular la derivada fraccionaria de orden α, de la función $f(x)=x^{\mu}$, $\mu>-1$ y $\alpha>0$.*

***Solución* 2.6.** Usando la ecuación (2.2.22) de la definición (2.2) se tiene

$$
{}_0D_x^{\alpha}x^{\mu} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}t^{\mu}dt\right]
$$

Haciendo $t=xv \rightarrow dt=xdv$

$$\begin{aligned}
{}_0D_x^{\alpha}x^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\int_0^1 (x-xv)^{n-\alpha-1}x^{\mu}v^{\mu}xdv\right]\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-\alpha+\mu}\int_0^1 (1-v)^{n-\alpha-1}v^{\mu}dv\right]\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-\alpha+\mu}.\mathrm{B}(\mathrm{n}-\alpha,\mu+1)\right]\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-\alpha+\mu}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}\right]\\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-\alpha+\mu}\right)\\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu-n+1)}x^{n-\alpha+\mu-n}\\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}x^{\mu-\alpha}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$ {}_0D_x^{\alpha}x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}x^{\mu-\alpha} \tag{2.2.24}$$

Ejemplo 2.7. *Calcular la derivada fraccionaria de* $f(x) = \ln x, x > 0.$

***Solución* 2.7.** Para determinar la derivada fraccionaria de esta función es necesario considerar el resultado de su integral fraccionaria obtenida del ejemplo(2.3).

Luego por la definición de la derivada fraccionaria se tiene

$$
\begin{aligned}
{}_0D_x^{\alpha}\ln x &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\ln t dt \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[{}_0I_x^{n-\alpha}\ln x\right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}(\ln x-\gamma-\psi(n-\alpha+1)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[D^{n-k}x^{n-\alpha}\right]\left[D^k(\ln x-\Phi)\right],\ \Phi=\gamma+\psi(n-\alpha+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\binom{n}{0}\left[D^n x^{n-\alpha}\right]\left[D^0(\ln x-\Phi)\right]\right. \\
&\left.+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left[D^{n-k}x^{n-\alpha}\right]\left[D^k(\ln x-\Phi)\right]\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\frac{\Gamma(n-\alpha+1)x^{n-\alpha-n}}{\Gamma(n-\alpha-n+1)}(\ln x-\Phi)\right. \\
&\left.+D^{n-k}x^{n-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left[D^k(\ln x-\Phi)\right]\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\frac{\Gamma(n-\alpha+1)x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}(\ln x-\Phi)\right. \\
&\left.+\frac{\Gamma(n-\alpha+1)x^{n-\alpha-n+k}}{\Gamma(n-\alpha-n+k+1)}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\frac{\Gamma(n-\alpha+1)x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}(\ln x-\Phi)-\frac{\Gamma(n-\alpha+1)x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha+k)}\right. \\
&\left.\times\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k n!k!}{k!(n-k)!k}\right] \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\ln x-\Phi-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k n!\Gamma(1-\alpha)}{k(n-k)!\Gamma(1-\alpha+k)}\right] \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\ln x-\Phi-(\psi(1-\alpha)-\psi(n-\alpha+1))\right] \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\ln x-\Phi-\psi(1-\alpha)+\psi(n-\alpha+1))\right] \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\ln x-\gamma-\psi(n-\alpha+1)-\psi(1-\alpha)+\psi(n-\alpha+1)\right] \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\ln x-\gamma-\psi(1-\alpha)\right]
\end{aligned}
$$

En la expresión anterior se usó la ecuación (2.2.13), la regla de Leibniz del teorema (1.2.1) y el corolario (1.1). Por lo tanto, la derivada fraccionaria de la función logaritmo es

$$ {}_0D_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\ln x - \gamma - \psi(1-\alpha)\right] \tag{2.2.25} $$

Ejemplo 2.8. *Encontrar la derivada fraccionaria de orden μ de la función $f(x) = x^{\lambda} \ln x$*

***Solución* 2.8.**

$$
\begin{aligned}
{}_0D_x^{\alpha}[x^{\mu} \ln x] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\lambda} \ln t dt \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\lambda} \ln t dt\right] \\
&= \frac{d^n}{dx^n} [{}_0I_x^{n-\alpha} x^{\lambda} \ln x] \\
&= \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{\Gamma(\lambda+1) x^{\lambda+n-\alpha}}{\Gamma(\lambda+n-\alpha+1)} [\ln x + \psi(\lambda+1) - \psi(\lambda+n-\alpha+1)]\right] \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{\lambda+n-\alpha} [\ln x + \psi(\lambda+1) - \psi(\lambda+n-\alpha+1)]\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \psi(\lambda+1) - \psi(\lambda+n-\alpha+1) \\
{}_0D_x^{\alpha}[x^{\lambda} \ln x] &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[D^{n-k} x^{\lambda+n-\alpha}\right] \left[D^k (\ln x + \Phi)\right] \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\alpha+1)} \left[\binom{n}{0} \left[D^n x^{\lambda+n-\alpha}\right] \left[D^0 (\ln x + \Phi)\right] \right. \\
&\left. + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left[D^{n-k} x^{\lambda+n-\alpha}\right] \left[D^k (\ln x + \Phi)\right]\right] \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\alpha+1)} \left[\frac{\Gamma(\lambda+n-\alpha+1) x^{\lambda+n-\alpha-n}}{\Gamma(\lambda+n-\alpha-n+1)} (\ln x + \Phi) \right. \\
&\left. + \frac{\Gamma(\lambda+n-\alpha+1) x^{\lambda+n-\alpha-n+k}}{\Gamma(\lambda+n-\alpha-n+k+1)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (k-1)! x^{-k}\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}x^{\lambda-\alpha}\left[\ln x+\Phi-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k(n-k)!}\frac{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+k+1)}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}x^{\lambda-\alpha}\left[\ln x+\Phi-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k(n-k)!}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+k+1)}\right], x=\lambda-\alpha$$

usando corolario(1.1)

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}x^{\lambda-\alpha}\Bigg[\ln x+\psi(\lambda+1)$$

$$-\psi(\lambda+n-\alpha+1)-(\psi(x+1)-\psi(x+1+n))\Bigg]$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}x^{\lambda-\alpha}\Bigg[\ln x+\psi(\lambda+1)$$

$$-\psi(\lambda+n-\alpha+1)-(\psi(\lambda-\alpha+1)-\psi(\lambda-\alpha+1+n))\Bigg]$$

$$\therefore {}_0D_x^{\alpha}[x^{\lambda}\ln x] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}x^{\lambda-\alpha}\left[\ln x+\psi(\lambda+1)-\psi(\lambda-\alpha+1)\right]$$

Ejemplo 2.9. *Calcule la derivada fraccionaria de la función de Mittag-Leffler de un parámetro* $\mathrm{E}_{\alpha}(ax^{\alpha})$*, donde* $0\neq a\in\mathbb{R}$*.*

***Solución* 2.9.** Considerando que la función de Mittag-Leffler se define como una serie que converge absolutamente, tenemos

$${}_0D_x^{\alpha}\mathrm{E}_{\alpha}(ax^{\alpha}) = {}_0D_x^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k\,{}_0D_x^{\alpha}\left(x^{\alpha k}\right)}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k\Gamma(\alpha k+1)x^{\alpha k-\alpha}}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha k-\alpha+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k x^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)},\ \text{aqui usamos(2.2.24)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^0 x^{\alpha(-1)}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)} \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{j+1} x^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+1)}, \text{ donde } j = k-1 \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + a \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j x^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+1)} \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + a \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a x^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j+1)} \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + a \mathrm{E}_{\alpha}\left(a x^{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente la derivada fraccionaria de la función de Mittag-Leffler de un parámetro es

$$
{}_0D_x^{\alpha} \mathrm{E}_{\alpha}\left(a x^{\alpha}\right) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + a \mathrm{E}_{\alpha}\left(a x^{\alpha}\right) \tag{2.2.26}
$$

Ejemplo 2.10. *Calcule la derivada fraccionaria de la función exponencial* e^{ax}*.*

***Solución* 2.10.**

$$
\begin{aligned}
{}_0D_x^{\alpha} e^{ax} &= {}_0D_x^{\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k {}_0D_x^{\alpha}\left(x^k\right)}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \Gamma(k+1)}{k!} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}, \text{ aqui usamos(2.2.24)} \\
&= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^k}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&= \mathscr{E}_x(-\alpha, a) = x^{-\alpha} \mathrm{E}_{1,1-\alpha}(ax), \text{ aqui usamos(1.7.16) y (1.7.13)}
\end{aligned}
$$

Finalmente la derivada fraccionaria de la función exponencial $\boldsymbol{e^{ax}}$ es

$$ {}_0D_x^{\alpha}e^{ax} = \mathscr{E}_x(-\alpha, a) = x^{-\alpha}\mathrm{E}_{1,1-\alpha}(ax) \tag{2.2.27} $$

A continuación la siguiente tabla muestra la derivada fraccionaria de algunas funciones elementales

Cuadro 2.2: Derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, ${}_aD_x^{\alpha}f(x),\quad x > a$

Función $f(x)$	Derivada fraccionaria /expresión
$(x-a)^{\mu}, x > a \geq 0, \mu > -1$	${}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\mu} = \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}(x-a)^{\mu-\alpha}$
$x^{\mu},\ \ x > a = 0, \mu > -1$	${}_0D_x^{\alpha}x^{\mu} = \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}x^{\mu-\alpha}$
$1,\ x > a = 0$	${}_0D_x^{\alpha}(1) = \dfrac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
$k,\ x > a = 0,\ k$(constante)	${}_0D_x^{\alpha}k = \dfrac{kx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
$\ln x,\ x > a = 0$	${}_0D_x^{\alpha}\ln(x) = \dfrac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}[\ln x - \gamma - \psi(1-\alpha)]$
$x^{\lambda}\ln x,\ x > a = 0, \lambda > -1$	${}_0D_x^{\alpha}x^{\lambda}\ln x = \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}x^{\lambda-\alpha}$ $\times\left[\ln x + \psi(\lambda+1) - \psi(\lambda-\alpha+1)\right]$
$e^{\lambda x},\ x > a = 0, \lambda > 0$	${}_0D_x^{\alpha}e^{\lambda x} = x^{-\alpha}\mathrm{E}_{1,1-\alpha}(\lambda x) = \mathscr{E}_x(-\alpha, \lambda)$
$xe^{\lambda x},\ x > a = 0, \lambda > 0$	${}_0D_x^{\alpha}xe^{\lambda x} = x\mathscr{E}_x(-\alpha, \lambda) + \alpha\mathscr{E}_x(1-\alpha, \lambda)$
$\cos(\lambda x),\ x > a = 0$	${}_0D_x^{1/2}\cos(\lambda x) = \sqrt{2\lambda}\Big[\cos(\lambda x)C(z) + \sin(\lambda x)S(z)\Big]$
$\sin(\lambda x),\ x > a = 0$	${}_0D_x^{1/2}\sin(\lambda x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{2\lambda}\Big[\cos(\lambda x)S(z) - \sin(\lambda x)C(z)\Big]$
$x^{1/2}\ln x$	${}_0D_x^{1/2}\left[x^{1/2}\ln x\right] = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\Big(\ln\dfrac{x}{4} + 2\Big)$
$\ln x$	${}_0D_x^{1/2}\ln x = \dfrac{\ln 4x}{\sqrt{\pi x}}$

Donde: $z = \sqrt{\dfrac{2\lambda x}{\pi}}$, $C(z)$ y $S(z)$, son las integrales de **Fresnel**.

2.3. Interpretación geométrica y física de la Integral Fraccionaria

Aunque la interpretación geométrica y física de la integral y derivada fraccionaria de orden α es un problema abierto en el cálculo fraccionario, en esta sección se propondrá una interpretación geométrica y física de la integral y derivada fraccionaria, la cual pueda aportar a su mejor comprensión. En primer lugar, la interpretación geométrica de la integral fraccionaria se basa en la interpretación de la integral de Riemann-Stieltjes. Por otro lado, la interpretación física de la integral y derivada fraccionaria estará basada en dos clases de tiempo. (Rodríguez, 2010)

2.3.1. Interpretación Geométrica de la integral fraccionaria

Dado que la integral fraccionaria de Riemann Liouville de orden $\alpha > 0$, definida por

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, $$

puede ser expresada como una integral de Riemann-Stieltjes de la siguiente manera

$$ {}_aI_t^\alpha f(t) = \int_a^t f(\tau) dg_t(\tau), \tag{2.3.1} $$

por lo cual, en este caso f pertenecería al conjunto $\Re(g_t)[a,b])$, donde

$$ g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[t^\alpha - (t-\tau)^\alpha],\ \tau \in [a,t], \tag{2.3.2} $$

es una función estrictamente monótona creciente, como es requerido por la Definición (1.8). Sin pérdida de generalidad, se considerará la integral fraccionaria con límite inferior de integración cero. Por lo tanto la integración fraccionaria de la función es el área bajo la curva de la gráfica de $f(\tau)$ y $g(\tau)$, de 0 a t. Tomemos los tres ejes τ, $g(\tau)$ y $f(\tau)$ haciendo una habitación cúbica con piso que comprende el plano $\tau, g(\tau)$. Se traza la función a partir de $0 < t < \tau$, en el piso

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[t^\alpha - (t-\tau)^\alpha]$$

Esto se representa en la Figura 2.1. A lo largo de la curva obtenida (en el piso) construimos una cerca de altura variable $f(\tau)$, por lo que el borde superior de la cerca es una línea en tres dimensiones. Los puntos son $\tau, g(\tau), f(\tau)$ para $0 < \tau < t$. 91

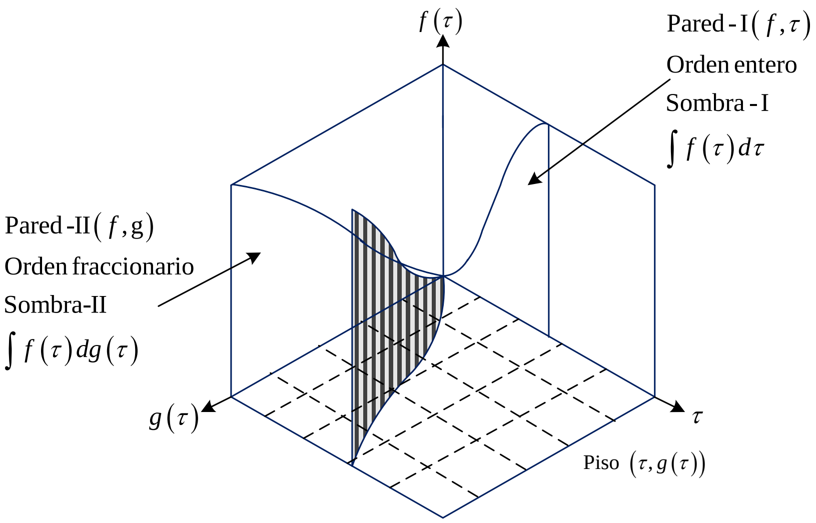


Figura 2.1: La representación 3D de la integración fraccionaria de Riemann-Liouville.

En otras palabras, la “cerca” lanza dos sombras en dos paredes. La primera sombra sobre la pared $(\tau, f(\tau))$ como se muestra en la Figura 2.1, es conocida como el área bajo la curva $f(\tau)$ y es la interpretación geométrica de la integración de orden entero, es decir

$$_0I_t^1 f(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

La segunda sombra sobre la pared $(g(\tau), f(\tau))$ es la interpretación geométrica de la integral fraccionaria de $f(t)$, es decir

$$_0I_t^{\alpha} f(t) = \int_0^t f(\tau)dg_t(\tau),$$

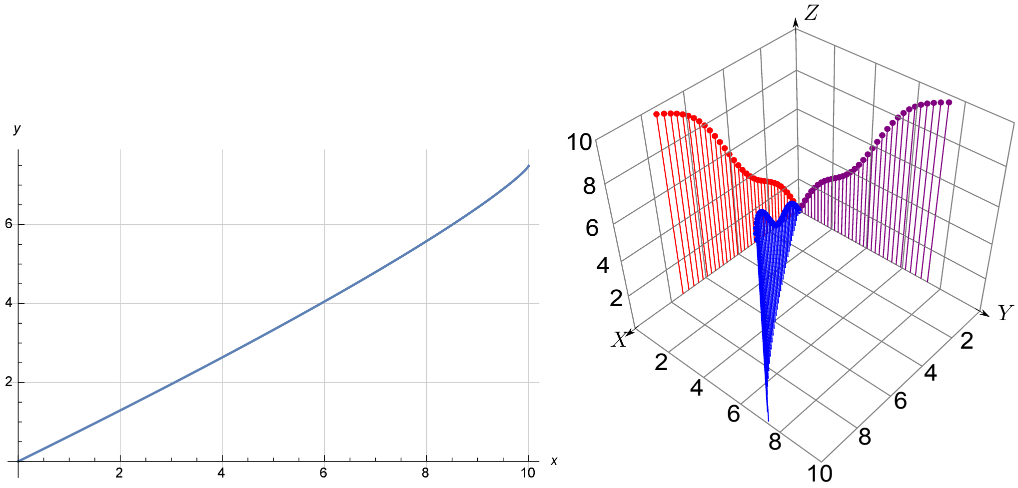
para un t fijo, es decir, el área bajo la sombra de la pared-II.

Obviamente para $g_t(\tau) = \tau$ ambas sombras son iguales. Esto muestra que la integración definida clásica es un caso particular de la integración fraccionaria de Riemann-Liouville desde el punto de vista geométrico. Asimismo se representarán las funciones $y = g_t(x)$ y $z = f(x)$ en los planos XY y XZ respectivamente. Para ilustrar esta interpretación se considerarán la función f y el cerco $\mathcal{C}$ de la siguiente forma

$$f(x) = x + \frac{1}{2}sen(x), x \in [0, 10],$$

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = g_t(x), z = f(x)(f \in \Re(g_t)[a, b])\},$$

(ver Fig.(2.2)).



(a) Representación de g_t.

(b) Representación del cerco $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.

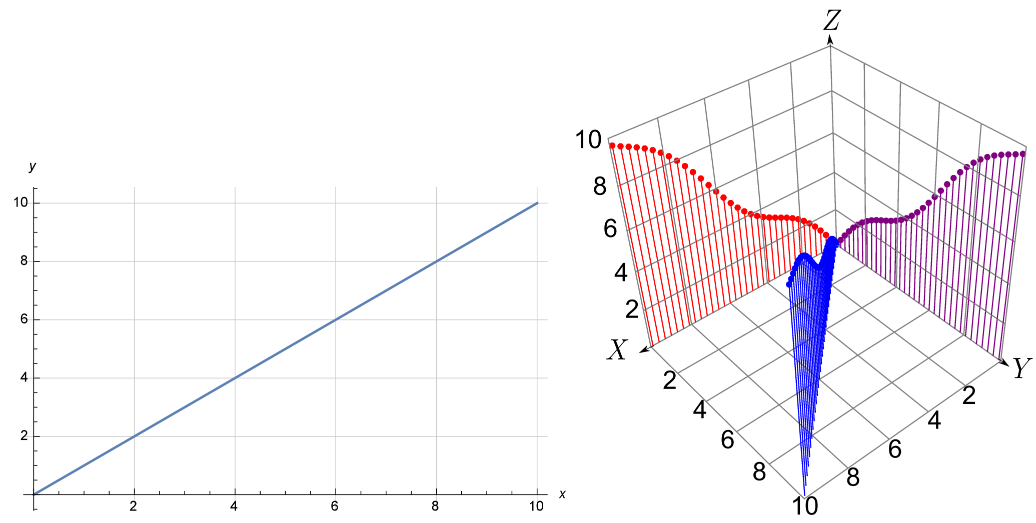
Figura 2.2: Representaciones de g_t y del cerco $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, para $\alpha = 0.85; t = 10$.

Se tienen los siguientes resultados.

Resultado 1. Para $\alpha = 1$ en (2.3.1), se tiene la integral de Riemann usual, pues $g_t(x) = x$, es decir

$$ {}_0I_t^1 f(t) = \int_0^t f(x)dx, \quad t \geq 0. $$

Obviamente, si $\alpha = 1$, entonces $g_t(x) = x$, y la proyección P_S del cerco $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ es una curva de igual forma a la representación de la función f, excepto que se encuentran en diferentes planos. Esto no hace más que mostrar que la generalización de esta interpretación se cumple para casos conocidos.(ver Fig.(2.3))



(a) Representación de g_t.

(b) Representación del cerco $\mathcal{C}$.

Figura 2.3: Representaciones de g_t y del cerco $\mathcal{C}$, para $\alpha = 1; t = 10$.

Resultado 2. La proyección P_S del cerco $\mathcal{C}$, que se da sobre el plano YZ, determina una curva, cuya área bajo ésta corresponde al valor de la integral

$$\int_0^t f(x) dg_t(x), \quad t = 10$$

o que es lo mismo, el valor de la integral fraccionaria de orden α

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - x)^{\alpha - 1} f(x) dx,$$

(ver Fig.(2.2)).(Podlubny, 2001), (Rodríguez, 2010), (Das, 2011)

2.3.2. Interpretación física de la integral fraccionaria

Físicamente, la característica principal del cálculo diferencial e integral es usada para aplicaciones físicas que cambian constantemente en el tiempo, lo cual es ideal. Sin embargo, dichas aplicaciones no reflejan necesariamente la realidad muy exacta. Una interpretación física de la integral fraccionaria de orden α, se puede dar al considerar dos clases de tiempos.(Rodríguez, 2010)

2.3.2.1. Dos clases de tiempo

En 1972 Irving Ezra Segal, profesor de matemáticas de el Instituto Tecnológico de Massachusetts, continuó el trabajo de A. Einstein, en el campo de la teoría de la Relatividad. Ezra propuso una variante de la Teoría de la Relatividad, llamada Cronometría Cosmológica (CC), la cual está basada en el análisis del tiempo. De acuerdo a la CC existen dos clases de tiempo: Un **tiempo Cósmico**, y un **tiempo Local**, donde éste último es medido con los instrumentos actualmente existentes. Por lo tanto, el modelo ideal de tiempo homogéneo que fluye puede ser considerado como una aproximación del tiempo cósmico.(Rodríguez, 2010)

Para ilustrar esta idea, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.11. *Consideremos un objeto en movimiento equipado con un velocímetro y un reloj. El observador del objeto en movimiento registra al final de cada segundo (intervalo de tiempo) como $v_1, v_2, v_3, \ldots v_{10}$. Al final de 10 segundos el observador del objeto en movimiento calcula la distancia, $S_N = v_1+v_2+v_3+\ldots+v_{10}$, donde el observador toma para* *el reloj local cada intervalo de tiempo como "un segundo". Ahora el observador estacionario en el sistema de referencia fijo conoce que el reloj del observador móvil está corriendo lento. El tiempo actual al final de cada "un segundo" es* $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots$*. La distancia recorrida vista por el observador estacionario (llamado observador cósmico), por el tiempo actual (llamado tiempo cósmico) es* $S_O = v_1 + 2v_2 + 4v_3 + 8v_4 + 16v_5 + 32v_6 + 64v_7 + \ldots$*, el cual es mucho más que* S_N*. La integración de la velocidad local (rapidez) con el tiempo local es para la integración de orden entera y la integración de la velocidad recorrida con respecto al tiempo transformado es integración de orden fraccionario. Este fenómeno se da cuando los cuerpos en movimiento cambian su posición en el espacio-tiempo, el campo gravitacional en todo el espacio-tiempo cambia debido al movimiento del objeto. Como consecuencia, "el intervalo de tiempo cósmico", el cual corresponde a la historia del objeto en movimiento, cambia.* $S_N, v(\tau), \tau$*, distancia, velocidad, y tiempo del observador en movimiento con el objeto.* $S_O, v_O(t), t$*, distancia, velocidad y tiempo recorrido por el observador externo en el sistema de referencia fijo (cósmica). Se relacionan como*

$$S_N(t) = {}_0I_t^1 v(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau,\ S_O(t) = {}_0I_t^\alpha v(t) = \int_0^t v(\tau)dg(\tau),\ v(t) = {}_0D_t^\alpha S_O(t).$$

es la velocidad individual del velocímetro local relacionado a la distancia cósmica, y

$$v_O(t) = \frac{d}{dt}S_O(t) = \frac{d}{dt}{}_0D_t^{-\alpha}v(t) = {}_0D_t^{1-\alpha}v(t).$$

La primera derivada de la distancia cósmica es la velocidad cósmica, y la velocidad cósmica es una derivada fraccionaria de orden $(1-\alpha)$ *de la velocidad local. Las Figuras 2.4 y 2.5 da* *dos tipos de tiempos homogéneo (tiempo local) y heterogéneo (tiempo transformado). En el ejemplo anterior la variable t es usada como notación por ambos observadores* ***N*** *y* ***O****. La integración fraccionaria de tiempo significa la transformación del tiempo local a tiempo cósmico.(Das, 2011)*

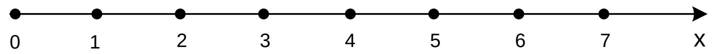


Figura 2.4: Eje del tiempo homogéneo.

El *tiempo Local*, es aquel que se modela usando una semirrecta con origen en cero y con puntos equidistantes. De otro lado, el *tiempo Cósmico* se modela usando una semirrecta con origen en cero y con puntos no equidistantes.

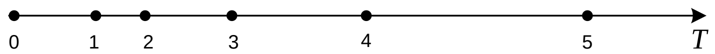


Figura 2.5: Eje del tiempo no homogéneo.

A continuación se considerará la idea mostrada para el caso de la integral fraccionaria. Como se vio anteriormente, considere la integral fraccionaria de una función $v(x)$ como una integral de Riemann-Stieltjes; es decir,

$$S_O(t) = \int_0^t v(x) dg_t(x) = {}_0I_t^{\alpha} v(t), \tag{2.3.3}$$

donde $g_t(x)$ es dado por (2.3.2). La integral $S_O(t)$ de Riemann-Stieltjes de la función $v(x)$ se puede interpretar como la distancia real recorrida por un objeto en movimiento, para los que hemos registrado los valores locales de su velocidad $v(x)$(Velocidad individual) y los valores locales de su tiempo x (Tiempo individual); la relación entre el tiempo x registrado a nivel local (el cual se considera que tiene intervalos constantes), y el tiempo cósmico, el cual no fluye constantemente, es dada por la función $g_t(x)$.

La función $g_t(x)$ describe la escala de tiempo no homogénea, que no sólo depende de x, sino también del parámetro t, representando el último valor medido del tiempo individual(del objeto en movimiento). Cuando t cambia, todo el intervalo anterior de tiempo cósmico cambia también. Esto está de acuerdo con los puntos de vista actuales de la física. Cuando un cuerpo en movimiento cambia su posición en el espacio-tiempo, el campo gravitatorio en todo el espacio-tiempo también cambia debido a este movimiento. Como consecuencia, el intervalo de tiempo cósmico, que corresponde a la historia del objeto en movimiento cambia. (Podlubny, 2001)

2.3.2.2. Interpretación física de la derivada fraccionaria

Por otro lado, podemos utilizar las propiedades de diferenciación e integración fraccionaria y expresar $v(t)$ de la ecuación (2.3.3) como la derivada fraccionaria Riemann-Liouville de $S_O(t)$:

$$v(t) = {}_0D_t^\alpha S_O(t),$$

donde ${}_0D_t^\alpha$ denota la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, dada por la ecuación(2.2.22) de la Definición(2.2), la cual se considerará restringida para $0 < \alpha < 1$. Con esta consideración, la derivada fraccionaria (2.2.22) queda definida por

$${}_0D_t^\alpha S_O(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{S_O(t)}{(t-x)^\alpha} dx, \tag{2.3.4}$$

la cual es la derivada fraccionaria de la distancia real recorrida $S_O(t)$ por un móvil, para la cual la relación entre el tiempo local x y el tiempo cósmico T en cada instante t es dada por la función $T = g_t(x)$, descrita por (2.3.2). En otras palabras (2.3.4) representa la velocidad para el observador independiente O. De otro lado, se puede diferenciar la relación (1.5.1) con respecto a la variable cósmica de tiempo t, el cual da la relación entre la velocidad $v_O(t) = S'_O(t)$ del movimiento de un móvil, desde el punto de vista del observador independiente $\boldsymbol{O}$ y la velocidad local $v(t)$:

$$v_O(t) = \frac{d}{dt} {}_0I_t^{\alpha} v(t) = {}_0D_t^{1-\alpha} v(t).$$

Por lo tanto, la $(1-\alpha)$ - derivada de la velocidad local $v(t)$, es igual a la velocidad $v_O(t)$ desde el punto de vista del observador independiente O. Para $\alpha = 1$, cuando no hay deformación dinámica de la escala del tiempo, ambas velocidades coinciden, es decir, $v_O(t) = v(t)$.(Podlubny, 2001)

2.4. Propiedades de la Integral y Derivada Fraccionaria

En el cálculo clásico existen ciertas propiedades que en el cálculo fraccionario se cumplen en forma análoga, con algunas consideraciones adicionales; con lo cual, el presente capítulo se muestra que muchas propiedades del cálculo clásico se cumplen en el cálculo fraccionario. Aquí nos referiremos a la integral y derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

2.4.1. Propiedades de la Integral Fraccionaria

En esta sección se enuncia una serie de propiedades de la integral fraccionaria, con el fin de resaltar las principales diferencias y analogías entre el comportamiento de ésta y la integral de orden entero clásico.

Teorema 2.1. *Sea $f \in L_1[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Entonces la integral fraccionaria ${}_aI_x^\alpha f$ existe para casi todo $x \in [a,b]$. Además la función ${}_aI_x^\alpha f$ es un elemento de $L_1[a,b]$.*

Teorema 2.2. *Sea $f \in C[a,b]$, se tiene*

$$\lim_{\alpha \to 0} {}_aI_x^\alpha f(x) = f(x) \tag{2.4.1}$$

Por lo tanto, sólo se escribirá

$${}_aI_x^0 f(x) = f(x) \tag{2.4.2}$$

Una propiedad importante de los operadores integrales de orden entero que es preservado al generalizar, es dado en el siguiente teorema.

Teorema 2.3. ***(Ley de los Exponentes).*** *Sea $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$ y $f \in L_1[a,b]$. Entonces,*

$${}_aI_x^\alpha \, {}_aI_x^\mu f(x) = {}_aI_x^\mu \, {}_aI_x^\alpha f(x) = {}_aI_x^{\alpha+\mu} f(x), \tag{2.4.3}$$

casi para todo $x \in [a,b]$.

Demostración.

$$ {}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-\tau)^{\mu-1} f(\tau) d\tau dt $$

Por el teorema (2.1), las integrales existen, y por el teorema Fubini (Rudin, 1986) podemos intercambiar el orden de integración, obteniendo

$$ \begin{aligned} {}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\mu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\mu-1} f(\tau)\ dt\ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\mu-1}\ dt\ d\tau \end{aligned} $$

haciendo $t = \tau + s(x-\tau)$

$$ \begin{aligned} {}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\mu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x f(\tau) \int_0^1 [(x-\tau)(1-s)]^{\alpha-1} \times [s(x-\tau)]^{\mu-1}(x-\tau)\ ds\ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\mu-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\mu-1}\ ds\ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\mu-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}\ d\tau \\ {}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\mu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha+\mu-1} f(\tau)\ d\tau \\ {}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\mu f(x) &= {}_aI_x^{\alpha+\mu} f(x). \end{aligned} $$

$\square$

Teorema 2.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Asumiendo que $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas en $[a,b]$. Entonces podemos intercambiar al operador integral fraccionario y el proceso del límite, es decir*

$$ \left({}_aI_x^\alpha \lim_{k\to\infty} f_k \right)(x) = \left(\lim_{k\to\infty} {}_aI_x^\alpha f_k \right)(x). $$

En particular, la sucesión de funciones $({}_aI_x^\alpha f_k)_{k=1}^\infty$ *es uniformemente convergente.*

Demostración. Denotamos el límite de la sucesión (f_k) por f, es decir $f_k \to f$. Se sabe que f es continua. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}|{}_aI_x^\alpha f_k(x) - {}_aI_x^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x |f_k(t)-f(t)|(x-t)^{\alpha-1}dt \\ &\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|f_k - f\|_\infty (x-a)^\alpha \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|f_k - f\|_\infty (b-a)^\alpha\end{aligned}$$

lo cual $\|f_k - f\|_\infty$ converge uniformemente a cero cuando $k \to \infty$ para todo $x \in [a,b]$. $\square$

Corolario 2.1. *Sea* f *una función analítica en* $(a-h, a+h)$ *para algún* $h > 0$*, y sea* $\alpha > 0$*. Entonces*

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (x-a)^{k+\alpha}}{k!(\alpha+k)\Gamma(\alpha)} D^k f(x), \tag{2.4.4}$$

para $a \leq x < a + h/2$*, y*

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(x-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+1+\alpha)} D^k f(a), \tag{2.4.5}$$

para $a \leq x < a+h$*. En particular,* ${}_aI_x^\alpha f$ *es analítica en* $(a, a+h)$*.*

Demostración. Para demostrar la primera afirmación, usamos la definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, entonces

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt. $$

Ahora se expande $f(t)$ en una serie de potencias centrado en x, es decir

$$ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x)}{k!}(t-x)^k, \tag{2.4.6} $$

luego como $x \in (a, a+h/2)$, la serie de potencias converge en todo el intervalo de integración. Luego se tiene

$$ \begin{aligned} {}_aI_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x)}{k!}(t-x)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(x)}{k!\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-x)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k D^k f(x)}{k!\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+k-1}\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{\alpha+k}}{k!(\alpha+k)\Gamma(\alpha)} D^k f(x). \end{aligned} $$

Para demostrar la segunda afirmación, procedemos similarmente, pero ahora expandimos la serie de potencias centrado en a y no en x; es decir,

$$ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{2.4.7} $$

$$\begin{aligned}
{}_aI_x^\alpha f(x) &= {}_aI_x^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(a)}{k!} {}_aI_x^\alpha (x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{\alpha+k}.
\end{aligned}$$

En particular, el hecho que ${}_aI_x^\alpha f$ sea analítica en $(a, a+h)$ se sigue de (2.4.5). Con lo cual se culmina la demostración. □

2.4.2. Propiedades de la Derivada Fraccionaria

Después de haber establecido algunas propiedades fundamentales de la integral fraccionaria, en esta sección se discutirá las propiedades de la derivada fraccionaria, así como algunos resultados importantes que se cumplen en el cálculo de orden entero.

Teorema 2.5. ***Linealidad***

Sea $f1$ y $f2$ dos funciones definidas en $[a, b]$ tales que ${}_aD_x^\alpha f_1$ y ${}_aD_x^\alpha f_2$ existen casi en todas partes. Por otra parte, sea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, ${}_aD_x^\alpha(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ existe en casi todas partes, y

$${}_aD_x^\alpha(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 {}_aD_x^\alpha f_1 + c_2 {}_aD_x^\alpha f_2$$

Demostración. Por ejemplo, usando la definición de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α ($n-1 \leq \alpha < n$) definida por (2.2.22) se tiene:

$$
\begin{aligned}
{}_aD_x^{\alpha}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right) dt \\
&= \frac{c_1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f_1(t) dt \\
&+ \frac{c_2}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f_2(t) dt \\
{}_aD_x^{\alpha}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right) &= c_1\ {}_aD_x^{\alpha} f_1 + c_2\ {}_aD_x^{\alpha} f_2.
\end{aligned}
$$

□

Considérese la derivada fraccionaria de orden α, de una función f, definida en (2.2.22), si $\alpha = k \geq 1$ donde $k \in \mathbb{Z}$ y $x > a$

$$
{}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^{k+1}({}_aI_x^{k+1-k} f(x)) = D^k f(x),
$$

lo que quiere decir, que para $x > a$, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (2.2.22) de orden $\alpha = k$ coincide con la derivada entera de orden k.

Lema 2.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \alpha$. Entonces*

$$
{}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^n\,{}_aI_x^{n-\alpha} f(x) \tag{2.4.8}
$$

Demostración. La hipótesis en n implica que $n \geq \lceil \alpha \rceil$. Así

$$\begin{aligned} D^n {}_aI_x^{n-\alpha} f(x) &= D^{\lceil \alpha \rceil} D^{n-\lceil \alpha \rceil} {}_aI_x^{n-\lceil \alpha \rceil} {}_aI_x^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} f(x) \\ &= D^{\lceil \alpha \rceil} {}_aI_x^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} \\ &= {}_aD_x^{\alpha} f(x), \end{aligned}$$

$\square$

esto es debido a (2.4.3) y (2.5.1). El siguiente resultado contiene una condición suficiente para la existencia de ${}_aD_x^{\alpha} f$.

Lema 2.2. *Sea* $f \in AC[a,b]$ *y* $0 < \alpha < 1$. *Entonces* ${}_aD_x^{\alpha} f$ *existe casi en todo* $x \in [a,b]$. *Además* ${}_aD_x^{\alpha} f \in L_p[a,b]$ *para* $1 \leq p < 1/\alpha$ *y*

$${}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha} dt \right) \tag{2.4.9}$$

Demostración. Como $f \in AC[a,b]$, entonces f es diferenciable casi en todas partes en (a,b) con $f' \in L1[a,b]$, entonces

$$f(x) = \int_a^x f'(u)du + f(a) = {}_aI_x^1 f'(x) + f(a)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt \\
&= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt \\
&= \frac{d}{dx}{}_aI_x^{1-\alpha} f(x) \\
&= \frac{d}{dx}{}_aI_x^{1-\alpha}\left({}_aI_x^1 f'(x) + f(a)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left({}_aI_x^{1-\alpha}{}_aI_x^1 f'(x) + {}_aI_x^{1-\alpha} f(a)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left({}_aI_x^{1-\alpha}{}_aI_x^1 f'(x) + \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left({}_aI_x^{1-\alpha}{}_aI_x^1 f'(x)\right) + \frac{d}{dx}\frac{f(a)(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&= \frac{d}{dx}\left({}_aI_x^{1-\alpha}{}_aI_x^1 f'(x)\right) + \frac{f(a)(1-\alpha)(x-a)^{-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \\
&= \frac{d}{dx}\left({}_aI_x^{1-\alpha}{}_aI_x^1 f'(x)\right) + \frac{f(a)(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

por (2.4.3) se tiene

$${}_aI_x^{1-\alpha}{}_aI_x^1 f'(x) = {}_aI_x^1{}_aI_x^{1-\alpha} f'(x).$$

Luego

$${}_aD_x^\alpha f(x) = {}_aI_x^{1-\alpha} f'(x) + \frac{f(a)(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha}dt + \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha}\right]. \tag{2.4.10}$$

De (2.4.10) y la desigualdad de Hölder se deduce que ${}_aD_x^\alpha f \in L_p[a,b]$, para $1 \leq p < 1/\alpha$. □

En el teorema 2.3 se mostró que la integral fraccionaria cumple con la propiedad conmutativa. El siguiente teorema muestra un resultado análogo para la derivada fraccionaria.

Teorema 2.6. *Supongamos $\alpha, \mu \geq 0$. Además, sean $\phi \in L_1[a,b]$ y $f = {}_aI_x^{\alpha+\mu}\phi$. Entonces*

$$ {}_aD_x^{\alpha}\,{}_aD_x^{\mu} f = {}_aD_x^{\alpha+\mu} f \tag{2.4.11}$$

***Observación* 6.**

Para aplicar esta identidad no necesitamos conocer la función ϕ explícitamente; basta con saber que existe tal función.

Demostración. Por la definición del operador diferencial de Riemann-Liouville,

$$ {}_aD_x^{\alpha}\,{}_aD_x^{\mu} f = {}_aD_x^{\alpha}\,{}_aD_x^{\mu}\,{}_aI_x^{\alpha+\mu}\phi = D^{\lceil\alpha\rceil}\,{}_aI_x^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} D^{\lceil\mu\rceil}\,{}_aI_x^{\lceil\mu\rceil-\mu}\,{}_aI_x^{\alpha+\mu}\phi. $$

La propiedad semigrupo (2.4.3) de los operadores integrales nos permite reescribir esta expresión como

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^{\alpha}\,{}_aD_x^{\mu} f &= D^{\lceil\alpha\rceil}\,{}_aI_x^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} D^{\lceil\mu\rceil}\,{}_aI_x^{\lceil\mu\rceil+\alpha}\phi \\ &= D^{\lceil\alpha\rceil}\,{}_aI_x^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} D^{\lceil\mu\rceil}\,{}_aI_x^{\lceil\mu\rceil}\,{}_aI_x^{\alpha}\phi. \end{aligned} $$

Debido a (1.1.1) y el hecho de que los órdenes de los operadores integrales y diferenciales involucrados son números naturales, encontramos que esto es equivalente a

$$ {}_aD_x^{\alpha}\,{}_aD_x^{\mu} f = D^{\lceil\alpha\rceil}\,{}_aI_x^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\,{}_aI_x^{\alpha}\phi = D^{\lceil\alpha\rceil}\,{}_aI_x^{\lceil\alpha\rceil}\phi $$

Donde hemos utilizado una vez más la propiedad semigrupo (2.4.3) de integración fraccionaria. Ahora podemos usar (1.1.1) una vez más y obtener

$$ {}_aD_x^{\alpha}{}_aD_x^{\mu}f = \phi. $$

En forma análoga se tiene que ${}_aD_x^{\alpha+\mu}f = \phi$. $\square$

Los siguientes ejemplos muestran algunos casos en los que la condición no se cumple. Ellos demuestran que una propiedad de semigrupo incondicional de diferenciación fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville no se mantiene.

Ejemplo 2.12. *Sea $f(x) = x^{-1/2}$, y $\alpha = \mu = 1/2$.*

Entonces, como se muestra en el ejemplo 2.6, ${}_0D_x^{\alpha}x^{-1/2} = {}_0D_x^{\mu}x^{-1/2} = 0$, y por lo tanto también ${}_0D_x^{1/2}{}_0D_x^{1/2}x^{-1/2} = 0$, pero ${}_0D_x^{1/2+1/2}x^{-1/2} = D^1x^{-1/2} = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$.

Ejemplo 2.13. *Sea $f(x) = x^{1/2}$, $\alpha = 1/2$, y $\mu = 3/2$.*

Entonces, ${}_0D_x^{1/2}x^{1/2} = \dfrac{\pi}{2}$ y ${}_0D_x^{3/2}x^{1/2} = 0$. Esto implica ${}_0D_x^{1/2}{}_0D_x^{3/2}x^{1/2} = 0$, pero ${}_0D_x^{3/2}{}_0D_x^{1/2}x^{1/2} = -\dfrac{1}{4}x^{-3/2}$ y ${}_0D_x^{1/2+3/2}x^{1/2} = D^2x^{1/2} = -\dfrac{1}{4}x^{-3/2}$.

En otras palabras, el ejemplo (2.12) demuestra que es posible tener

$$ {}_0D_x^{\alpha}{}_0D_x^{\mu}f(x) = {}_0D_x^{\mu}{}_0D_x^{\alpha}f(x) \neq {}_0D_x^{\alpha+\mu}f(x). $$

Mientras que el ejemplo (2.13) muestra el caso donde

$$ {}_0D_x^{\alpha}{}_0D_x^{\mu}f(x) \neq {}_0D_x^{\mu}{}_0D_x^{\alpha}f(x) = {}_0D_x^{\alpha+\mu}f(x), $$

se mantiene. Un resultado análogo al teorema 2.4, se enuncia a continuación.

Teorema 2.7. *Sea $\alpha > 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Supóngase que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas en $[a,b]$, y que ${}_0D_x^{\alpha} f_k$ existe para todo k. Además, supóngase que $\{{}_0D_x^{\alpha} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en $[a+\epsilon, b]$ para todo $\epsilon > 0$. Entonces, para todo $x \in (a,b]$, se tiene*

$$\left(\lim_{k\to\infty} {}_aD_x^{\alpha} f_k \right)(x) = \left({}_aD_x^{\alpha} \lim_{k\to\infty} f_k \right)(x).$$

Demostración. Por definición se tiene

$${}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^m {}_aI_x^{m-\alpha} f(x).$$

Por el teorema(2.4), la sucesión $\{{}_0I_x^{\alpha} f_k\}_k$ es uniformemente convergente, y se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} {}_aI_x^{\alpha} f_k(x) = {}_aI_x^{\alpha} \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Además, por hipótesis $D^m {}_aI_x^{m-\alpha} f(x)$es uniformemente convergente en todo subintervalo compacto de $(a,b]$, luego

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} {}_aD_x^{\alpha} f_k(x) &= \lim_{k\to\infty} D^m {}_aI_x^{m-\alpha} f_k(x) \\
&= D^m \lim_{k\to\infty} {}_aI_x^{m-\alpha} f_k(x) \\
&= D^m {}_aI_x^{m-\alpha} \lim_{k\to\infty} f_k(x) \\
&= {}_aD_x^{\alpha} f_k(x).
\end{aligned}$$

□

Podemos deducir un análogo del corolario 2.1.

Corolario 2.2. *Sea f una función analítica en $(a-h, a+h)$ para algún $h > 0$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Entonces*

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} D^k f(x), \tag{2.4.12}$$

para $a < x < a + h/2$, y

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} D^k f(a), \tag{2.4.13}$$

para $a < x < a + h$. En particular, ${}_aD_x^\alpha f$ es analítica en $(a, a+h)$.

Demostración. Sea $n = \lceil \alpha \rceil$. Por definición de la derivada fraccionaria se tiene que

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = D^n {}_aI_x^{n-\alpha} f(x).$$

Para probar la expresión (2.4.12), hay que tener en cuenta el resultado de la expresión (2.4.4), luego

$$ {}_aI_x^{n-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{k+n-\alpha}}{k!(n-\alpha+k)\Gamma(n-\alpha)} D^k f(x), \tag{2.4.14}$$

Se tiene que,

$$ \binom{-\alpha}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+\alpha)} = \frac{(-1)^k}{k!(\alpha+k)\Gamma(\alpha)},$$

luego se tiene

$$ {}_aI_x^{n-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-n}{k} \frac{(x-a)^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} D^k f(x). $$

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^{\alpha} f(x) &= D^n\, {}_aI_x^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-n}{k} \frac{(x-a)^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} D^k f(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-n}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} D^n \left((x-a)^{k+n-\alpha} D^k f(x) \right), \end{aligned} \tag{2.4.15} $$

al aplicar la fórmula clásica de Leibniz para la derivada, en la expresión (2.4.15), se obtiene

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^{\alpha} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-n}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{n-j} (x-a)^{k+n-\alpha} D^{k+j} f(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-n}{k} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(x-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+1+j-\alpha)} D^{k+j} f(x). \end{aligned} $$

Por definición, $\binom{u}{j} = 0$, si $u \in \mathbb{N}$ y $u < j$; luego

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^{\alpha} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-n}{k} \binom{n}{j} \frac{(x-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+1+j-\alpha)} D^{k+j} f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \binom{\alpha-n}{k} \binom{n}{l-k} \frac{(x-a)^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} D^{l} f(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{\alpha-n}{k} \binom{n}{l-k} \frac{(x-a)^{l-\alpha}}{\Gamma(l-\alpha+1)} D^{l} f(x). \end{aligned} $$

Puesto que, $\sum_{k=0}^{l} \binom{\alpha-n}{k} \binom{n}{l-k} = \binom{\alpha}{l}$, finalmente se tiene,

$$
{}_aD_x^\alpha f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} \frac{(x-a)^{l-\alpha}}{\Gamma(l-\alpha+1)} D^l f(x).
$$

Por otro lado, por la expresión (2.4.5) se tiene que

$$
{}_aI_x^{n-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} D^k f(a),
$$

luego

$$
\begin{aligned}
{}_aD_x^\alpha f(x) &= D^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} D^k f(a) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{k+n-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
{}_aD_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}
$$

□

2.5. Relación entre la Derivada y la Integral fraccionaria de RL

Después de haber establecido una teoría de los operadores diferencial e integral de Riemann-Liouville por separado, ahora veremos cómo interactúan. Si se denota por D^n con $n \in \mathbb{N}$, la derivada de orden n, notar que,

$$
D^n {}_aI_x^n = I, \tag{2.5.1}
$$

donde I denota el operador identidad.

Teorema 2.8. *Sea $\alpha \geq 0$. Entonces, para todo $f \in L_1[a,b]$,*

$$_aD_x^\alpha {}_aI_x^\alpha f = f,$$

casi en todas partes.

Demostración. Para el caso $\alpha = 0$ es trivial, entonces $_aD_x^\alpha$ y $_aI_x^\alpha$ ambos son el operador identidad. Para $\alpha > 0$ se procede como en la demostración del teorema 2.6. Sea $m = \lceil \alpha \rceil$. Entonces, por la definición de $_aD_x^\alpha$, la propiedad semigrupo de integración fraccionaria(2.4.3) y (1.1.1) (que se puede aplicar aquí para $m \in \mathbb{N}$),

$$_aD_x^\alpha {}_aI_x^\alpha f(x) = D^m {}_aI_x^{m-\alpha} {}_aI_x^\alpha f(x) = D^m {}_aI_x^m f(x) = f(x).$$

□

Se ha demostrado que $_aD_x^\alpha$ es el inverso por la izquierda de $_aI_x^\alpha$. Claro está, que no se puede exigir que este sea el inverso por la derecha, salvo al considerar ciertas condiciones, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Sea $\alpha > 0$. Si existe una función $\phi \in L_1[a,b]$, tal que $f = {}_aI_x^\alpha \phi$, entonces*

$$_aI_x^\alpha {}_aD_x^\alpha f = f,$$

casi en todas partes.

Demostración. Tenemos, por definición de f y por el teorema 2.8, que

$$ {}_aI_x^\alpha \, {}_aD_x^\alpha f = {}_aI_x^\alpha [{}_aD_x^\alpha \, {}_aI_x^\alpha \phi] = {}_aI_x^\alpha \phi = f. $$

□

Si f no es como se requiere en los supuestos del teorema 2.9, entonces obtenemos una representación diferente para ${}_aI_x^\alpha \, {}_aD_x^\alpha f$.

2.6. Transformada de Laplace de la Integral Fraccionaria de RL

La transformada de Laplace resultará ser una herramienta indispensable, especialmente en nuestro estudio de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Brevemente inauguramos nuestro debate de este método poderoso, y las aplicaciones de esta técnica importante. La integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$ es

$$ {}_0I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, $$

el cual es la convolución integral. Entonces aplicando la transformada de Laplace se tiene que la transformada de Laplace de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$ es:

$$ \mathscr{L}\{{}_0I_x^\alpha f(x)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathscr{L}\{x^{\alpha-1}\} \mathscr{L}\{f(x)\} = s^{-\alpha} F(s), \ \alpha > 0 \tag{2.6.1} $$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de f. Como ejemplos de (2.6.1) tenemos para (1.6.1) que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}t^{\mu}\right\} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+\alpha+1}}, \quad \alpha>0, \quad \mu>-1 \\
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}e^{at}\right\} &= \frac{1}{s^{\alpha}(s-a)}, \quad \alpha>0 \\
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}t^{\mu-1}e^{at}\right\} &= \frac{\Gamma(\mu)}{s^{\alpha}(s-a)^{\mu}}, \quad \mu>0, \quad \alpha>0 \\
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}\cos at\right\} &= \frac{1}{s^{\alpha-1}(s^2+a^2)}, \quad \alpha>0 \\
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}\sin at\right\} &= \frac{a}{s^{\alpha}(s^2+a^2)}, \quad \alpha>0
\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Ejemplo 2.14. *Encuentra la transformada de Laplace de la integral fraccionaria de* $\boldsymbol{t^{\mu}}$.

Solución* 2.11*. Por (2.2.9) sabemos que

$$\begin{aligned}
{}_0I_x^{\alpha}x^{\mu} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}x^{\mu+\alpha} \\
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}t^{\mu}\right\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}t^{\mu+\alpha}\right\} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}.\mathscr{L}\left\{t^{\mu+\alpha}\right\} \\
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}t^{\mu}\right\} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}.\frac{\Gamma(\mu+\alpha+1)}{s^{\mu+\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+\alpha+1}}
\end{aligned}$$

Ahora usando (2.2.7) y haciendo uso del teorema de la convolución se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}t^{\mu}\right\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\xi^{\mu}d\xi\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\mathscr{L}\left\{\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}\xi^{\mu}d\xi\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\mathscr{L}\left\{t^{\alpha-1}\right\}.\mathscr{L}\left\{t^{\mu}\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}.\frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \\
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}t^{\mu}\right\} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+\alpha+1}}
\end{aligned}
$$

Ahora usando (2.6.1)

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}t^{\mu}\right\} &= s^{-\alpha}L\left\{t^{\mu}\right\} \\
&= s^{-\alpha}\frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \\
\mathscr{L}\left\{{}_0I_t^{\alpha}t^{\mu}\right\} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+\alpha+1}}
\end{aligned}
$$

2.7. Transformada de Laplace de la derivada Fraccionaria de RL

La transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann- Liouville de orden $\alpha > 0$ es:

$$\mathscr{L}\left\{{}_0D_t^{\alpha}f(t)\right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}D^{k-m+\alpha}f(0) \tag{2.7.1}$$

donde $m-1<\alpha\leq m$, para $m=1,2,3,\ldots$. Los casos especiales de (2.7.1) para $m=1$, $m=2$ y $m=3$, respectivamente, son

$$\mathscr{L}\left\{{}_0D_t^{\alpha}f(t)\right\}=s^{\alpha}F(s)-{}_0D_t^{\alpha-1}f(0),\quad 0<\alpha\leq 1, \tag{2.7.2}$$

$$\mathscr{L}\left\{{}_0D_t^{\alpha}f(t)\right\}=s^{\alpha}F(s)-s\,{}_0D_t^{\alpha-2}f(0)-{}_0D_t^{\alpha-1}f(0),\quad 1<\alpha\leq 2 \tag{2.7.3}$$

$$\mathscr{L}\left\{{}_0D_t^{\alpha}f(t)\right\}=s^{\alpha}F(s)-s^2\,{}_0D_t^{\alpha-3}f(0)-s\,{}_0D_t^{\alpha-2}f(0)-{}_0D_t^{\alpha-1}f(0),\quad 2<\alpha\leq 3 \tag{2.7.4}$$

2.8. Transformada Inversa de Laplace de algunas funciones

Sea $F(s)=\dfrac{1}{s^v(s-a)^n}$, encontremos su transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v(s-a)^n}\right\}=\frac{1}{(n-1)!\Gamma(v)}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\Gamma(v+k)t^{n-1-k}\mathscr{E}_t(v+k,a) \tag{2.8.1}$$

En particular si $n=1,2,3,\ldots$ en (2.8.1) se obtiene,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v(s-a)}\right\}=\mathscr{E}_t(v,a),\quad Re(v)>-1 \tag{2.8.2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v(s-a)^2}\right\}=t\mathscr{E}_t(v,a)-v\mathscr{E}_t(v+1,a),\quad Re(v)>-2 \tag{2.8.3}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v(s-a)^3}\right\}=\frac{1}{2}t^2\mathscr{E}_t(v,a)-vt\mathscr{E}_t(v+1,a)+\frac{1}{2}v(v+1)\mathscr{E}_t(v+2,a),\quad Re(v)>-3 \tag{2.8.4}$$

***Definición* 2.3.** Sea q un entero positivo y $v = \frac{1}{q}$, entonces la transformada inversa de Laplace de $\dfrac{1}{s^v - a}$ es:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v - a}\right\} = \sum_{j=1}^{q} a^{j-1}\mathscr{E}_t(jv-1, a^q) \tag{2.8.5}$$

En particular si $q = 1, 2, 3, \ldots$ $(v = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ en (2.8.5) se obtiene,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} = \mathscr{E}_t(0, a) = e^{at} \tag{2.8.6}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2} - a}\right\} = \mathscr{E}_t(-1/2, a^2) + a\mathscr{E}_t(0, a^2) \tag{2.8.7}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/3} - a}\right\} = \mathscr{E}_t(-2/3, a^3) + a\mathscr{E}_t(-1/3, a^3) + a^2\mathscr{E}_t(0, a^3) \tag{2.8.8}$$

***Observación* 7.**

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v - \alpha_i}\right\} = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_i^{q-k-1}\mathscr{E}_t(-kv, \alpha_i^q) = e_i(t) \tag{2.8.9}$$

***Observación* 8.**

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^v - a)^2}\right\} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{q} a^{j+k-2}\Bigg\{ & t\mathscr{E}_t((j+k)v - 2, a^q) \\ & - \left[(j+k)v - 2\right]\mathscr{E}_t((j+k)v - 1, a^q)\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.8.10}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^v-\alpha_i)^2}\right\} = \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_i^{2q-j-k-2}\Big\{t\mathscr{E}_t(-(j+k)v,\alpha_i^q) \\ + (j+k)v\mathscr{E}_t(1-(j+k)v,\alpha_i^q)\Big\} = e_i(t)*e_i(t) \tag{2.8.11}$$

Donde $e_i(t)*e_i(t)$ representa la convolución de $e_i(t)$ con sí mismo.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^v-a)^3}\right\} = \sum_{h=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{q}a^{h+j+k-3}\times\Bigg\{\frac{1}{2}t^2\mathscr{E}_t((h+j+k)v-3,a^q) \\ - t\left[(h+j+k)v-3\right]\mathscr{E}_t((h+j+k)v-2,a^q) \\ + \frac{1}{2}\left[(h+j+k)v-3\right]\left[(h+j+k)v-2\right]\times\mathscr{E}_t((h+j+k)v-1,a^q)\Bigg\} \tag{2.8.12}$$

En particular si $q=2$ (y por lo tanto $v=\frac{1}{2}$), entonces en (2.8.10) y (2.8.12) se tiene

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}-a)^2}\right\} = 2at\mathscr{E}_t(-1/2,a^2)+(1+2a^2t)\mathscr{E}_t(0,a^2)+a\mathscr{E}_t(1/2,a^2) \tag{2.8.13}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}-a)^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2\mathscr{E}_t(-3/2,a^2)+\frac{3}{2}t(a^2t+1)\mathscr{E}_t(-1/2,a^2) \\ + at(2a^2t+3)\mathscr{E}_t(0,a^2)+\frac{3}{8}t(4a^2t+1)\mathscr{E}_t(1/2,a^2) \\ - \frac{3}{8}a^2\mathscr{E}_t(3/2,a^2) \tag{2.8.14}$$

Capítulo3

Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Lineales con Coeficientes Constantes

3.1. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

Las ecuaciones diferenciales fraccionarias son “una extensión de las ecuaciones diferenciales de orden entero; es decir las ecuaciones diferenciales de orden entero son un caso particular de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario”.

Los actuales modelos matemáticos que aparecen hoy en día son los descritos por ecuaciones diferenciales que contienen derivadas de orden fraccionario. Sus evoluciones se comportan de una manera mucho más compleja que en el caso clásico de orden entero y el estudio de la teoría correspondiente es una tarea enormemente exigente.

Hay un conjunto de problemas en los cuales al parecer las aplicaciones son más evidentes, éstos se encuentran en: la robótica, en el área relacionada con el manejo de drones, que es a lo que se conoce como sistemas multiagentes; la electroquímica, la parte asociada a los procesos de carga y descarga de baterías portátiles; los sistemas de amortiguamiento, de los cuales está llena buena parte de los dispositivos mecánicos, como los de coches, máquinas y herramientas de las industrias; la física de las partículas elementales, en un área que hasta hace poco era exótica, la denominada electrodinámica cuántica.

Aunque los teoremas de la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias pueden ser obtenidos de forma similar, no toda la teoría clásica de la ecuación diferencial puede aplicarse directamente a las ecuaciones diferenciales fraccionarias.(Yong y cols., 2016)

3.1.1. Ecuación Diferencial Fraccionaria

Decimos que una ecuación diferencial es de orden fraccionario si al menos una de las derivadas que aparece es de orden fraccionario. Por ejemplo

$$D^{3/2}y(t) - 2Dy(t) - D^{1/2}y(t) + 2y(t) = 0.$$

El problema de encontrar una solución a las ecuaciones en general no es una tarea fácil. Por ejemplo, incluso hasta para resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

$$tD^2(t) + tDy(t) + (t^2 - v^2)y(t) = 0,\ t \geq 0,$$

(La ecuación de Bessel) requiere de un considerable esfuerzo. A decir verdad, la única clase de ecuaciones en la cual podemos encontrar una solución explicita sin hacer mucho esfuerzo es el tipo de ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes(o ecuaciones reducidas a esta forma).

3.1.2. Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Lineales Homogéneas de Coeficientes Constantes

Al trabajar con ecuaciones diferenciales (ya sean enteras o fraccionarias) un punto crítico es poder establecer si esa ecuación tiene solución (y entonces aplicar algún método para resolverlas) y si es única. Demostraremos que una ecuación diferencial fraccionaria de orden α, con $n-1<\alpha\leq n$ y con algunas estructuras también tiene una única solución, gracias al siguiente teorema.

3.1.3. Existencia y Unicidad

Teorema 3.1. *Si $f(t)\in L_1[0,T]$ es integrable y es tal que*

$$\int_0^T |f(t)|dt<\infty,$$

entonces la ecuación

$$ {}_0D_t^{\alpha}y(t)=f(t) \tag{3.1.1}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\left[{}_0D_t^{\alpha-k}y(t)\right]_{t=0}=b_k,\quad k=1,2,\ldots,n \tag{3.1.2}$$

tiene la única solución $y(t) \in L_1[0,T]$.

Demostración. Construyamos una solución del problema considerado. Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial fraccionaria se tiene

$$\mathscr{L}\left\{{}_0D_t^{\alpha}y(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$$

$$s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{\alpha-k-1}y(t)\right]_{t=0} = F(s),$$

de donde, al despejar $Y(s)$, llegamos a

$$\begin{aligned}
Y(s) &= s^{-\alpha}F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-\alpha}\left[{}_0D_t^{\alpha-k-1}y(t)\right]_{t=0} \\
Y(s) &= s^{-\alpha}F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{1}{s^{\alpha-k}} \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha}F(s)\right\} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha-k}}\right\} \\
y(t) &= {}_0I_t^{\alpha}y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}
\end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \tag{3.1.3}$$

Se sigue de (3.1.3) que $y(t) \in L_1[0,T]$. La sustitución directa de la función $y(t)$ definida por la expresión (3.1.3) en la ecuación (3.1.1) y las condiciones iniciales (3.1.2) muestra que $y(t)$ los satisface, y por lo tanto, la existencia de la solución queda probada. La unicidad sigue de la linealidad de la diferenciación fraccionaria y las propiedades de la transformada de Laplace. En efecto, si existen dos soluciones, $y_1(t)$ y $y_2(t)$, del problema considerado, entonces la función $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$ debe satisfacer la ecuación ${}_0D_t^{\alpha} z(t)$ y las condiciones iniciales cero, es decir

$$\left[{}_0D_t^{\alpha-k} z(t)\right]_{t=0},$$

entonces la transformada de Laplace de $z(t)$ es $Z(s) = 0$ y por consiguiente $z(t) = 0$ casi en todas partes del intervalo considerado, lo cual prueba que la solución en $L_1[0,T]$ es única. $\square$

3.1.4. Definición formal de ecuaciones diferenciales fraccionarias

Por ejemplo, considere la ecuación diferencial lineal

$$D^2(t) + aDy(t) + by(t) = 0 \tag{3.1.4}$$

Donde a y b son constantes. Luego si α y β son ceros distintos del polinomio indicial

$$P(x) = x^2 + ax + b, \tag{3.1.5}$$

Sabemos que $e^{\alpha t}$ y $e^{\beta t}$ son soluciones linealmente independientes de (3.1.4), mientras que si $\alpha = \beta$, entonces $e^{\alpha t}$ y $te^{\alpha t}$ son soluciones linealmente independientes de (3.1.4). Como un primer intento a definir una ecuación diferencial fraccionaria(EDF), sea $r_m, r_{m-1}, \ldots, r_1, r_0$ una sucesión estrictamente decreciente de números no negativos, entonces si $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son constantes,

$$\left[D^{r_m} + b_1 D^{r_{m-1}} + \ldots + b_m D^{r_0}\right] y(t) = x(t) \tag{3.1.6}$$

es candidato para representar de forma general una ecuación diferencial fraccionaria. Pero incluso esta ecuación es muy complicada. Aconsejamos imponer el requerimiento adicional que r_j sean números racionales. Así, si q es el mínimo común múltiplo de los denominadores de r_j entonces definimos formalmente la ecuación diferencial fraccionaria como:

$$\left[D^{nv} + a_1 D^{(n-1)v} + \ldots + a_n D^0\right] y(t) = x(t), \quad t \geq 0, \text{ donde } v = \frac{1}{q}. \tag{3.1.7}$$

3.1.5. Orden de una Ecuación Diferencial Fraccionaria

Llamaremos a (3.1.7) una ecuación diferencial lineal fraccionaria no homogénea con coeficientes constantes de orden (n, q), o más en breve, una ecuación diferencial fraccionaria no homogénea de orden (n, q). Si $q = 1$, entonces $v = 1$, (3.1.7) es simplemente una ecuación diferencial ordinaria. Si hacemos $x(t) = 0$ en (3.1.7), entonces

$$\left[D^{nv} + a_1 D^{(n-1)v} + \ldots + a_n D^0\right] y(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{3.1.8}$$

se llamará ecuación diferencial lineal fraccionaria homogénea con coeficientes constantes de orden (n, q).

Ejemplo 3.1. *Considere la siguiente ecuación diferencial fraccionaria*

$$y^{3.2}(t) + 4y^{1}(t) - y^{0.5}(t) + 3y^{1/3}(t) = 0$$

$$y^{16/5}(t) + 4y^{1/1}(t) - y^{1/2}(t) + 3y^{1/3}(t) = 0$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores sería mcm$(5,1,2,3) = q = 30$*.*

$$y^{96(1/30)}(t) + 4y^{30(1/30)}(t) - y^{15(1/30)}(t) + 3y^{10(1/30)}(t) = 0$$

Luego el orden de la EDF es $(96,30)$*.*

Por conveniencia introducimos el polinomio indicial

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{3.1.9}$$

Luego

$$P(D^v) = D^{nv} + a_1D^{(n-1)v} + \ldots + a_nD^0 \tag{3.1.10}$$

es un operador diferencial fraccionario, y podemos escribir a (3.1.8) como

$$P(D^v)y(t) = 0. \tag{3.1.11}$$

Ejemplo 3.2. *Considere la siguiente EDF*

$$D^{4/3}y(t) = 0 \tag{3.1.12}$$

de orden $(4,3)$*. Si* C_1 *y* C_2 *son constantes arbitrarias,*

$$y(t) = C_1t^{1/3} + C_2t^{-2/3}, \quad (v = \frac{1}{3}),$$

es una solución de (3.1.12). La primera solución es $y_1(t) = C_1 t^{1/3}$. Usando esto en la EDF obtenemos lo siguiente:

$$D^{4/3} y_1(t) = C_1 \frac{\Gamma(1/3+1) t^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+1)} = 0,$$

satisface como una solución. La segunda solución es $y_2(t) = C_2 t^{-2/3}$. Usando esto en la EDF obtenemos lo siguiente:

$$D^{4/3} y_2(t) = C_1 \frac{\Gamma(-2/3+1) t^{\frac{-2}{3}-\frac{4}{3}}}{\Gamma(\frac{-2}{3}-\frac{4}{3}+1)} = 0,$$

también satisface como una solución.

La combinación de estas dos da la solución de la EDF (3.1.12).

Uno puede paralelamente acercarse a una EDF. Considere $D^1 y(t) = 0$, tiene una solución, $y(t) = C$, C una constante. $D^2 y(t) = 0$, tiene dos soluciones, $y_1(t) = C_1 t$ y $y_2(t) = C_2$. Aquí $Dy_1(t) = y_2(t)$ y la solución compuesta es $y(t) = C_1 t + C_2$. Del mismo modo, $D^3 y(t) = 0$, tiene tres soluciones, y la solución combinada es $y(t) = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$. En general una EDO de orden n tiene n soluciones linealmente independientes. La EDF $D^{1.333} y(t) = 0$, tiene dos soluciones y no 1.333.. soluciones. Aquí $nv = 4/3 = 1.333$, lógicamente debe tener un número entero de soluciones $N \geq nv$, entonces la EDF (3.1.12) tiene dos soluciones.

Comenzamos nuestro desarrollo indicando como uno podría aproximarse al problema de encontrar una solución a una ecuación diferencial fraccionaria homogénea. Dos argumentos están presentes: uno implica un acercamiento directo, y el otro basado en la transformada de Laplace. Ahora sabemos que una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden n tiene n soluciones linealmente independientes. Así que motivados por algunos argumentos apropiados de teoría sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, mostramos como construir soluciones linealmente independientes de ecuaciones diferenciales fraccionarias homogéneas (Teorema 3.2). Ya que gran parte de nuestra teoría esta en paralelo con la teoría correspondiente de las ecuaciones diferenciales ordinarias, de vez en cuando encontraremos que es conveniente hacer un paréntesis para recordar ciertos hechos apropiados de la teoría.

3.2. Motivación: Enfoque directo

¿Cómo vamos hacer para encontrar una solución para (3.1.8) o (3.1.11)?. Bien, si teníamos una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes,

$$[D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n D^0]y(t) = 0 \tag{3.2.1}$$

se tenía que $y(t) = e^{ct}$. Si hacemos eso, entonces encontramos que $P(D)e^{ct} = P(c)e^{ct}$, donde $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ es el polinomio indicial. En consecuencia si c es una raíz de la ecuación indicial $P(x) = 0$ es una solución de (3.2.1). Sin embargo, si aplicamos el operador diferencial fraccionario D^u para e^{ct}, obtenemos

$$D^u e^{ct} = \mathscr{E}_t(-u, c), \tag{3.2.2}$$

observamos que la función exponencial cambia a la función trascendental, no conserva en sí la diferenciación fraccionaria. Por lo tanto, e^{ct} no será muy útil para tratar de resolver la ecuación diferencial fraccionaria (EDF). Sin embargo, si aplicamos la derivada fraccionaria a la función transcendental de (Miller-Ross) se observa que

$$D^u \mathscr{E}_t(v, c) = \mathscr{E}_t(v - u, c), \tag{3.2.3}$$

conserva su forma. Tal vez, esto podría ser un candidato para resolver EDF. La función de Miller-Ross($\mathscr{E}_t(v, a)$) y algunas de sus propiedades elementales están definidas, en el capítulo 2.

También sabemos que

$$D^u t\mathscr{E}_t(v, c) = t\mathscr{E}_t(v - u, c) + u\mathscr{E}_t(v - u + 1, c),\ v > -2. \tag{3.2.4}$$

Estas fórmulas parecen ser algo similares que $De^{ct} = ce^{ct}$ y $Dte^{ct} = e^{ct} + tce^{ct}$, respectivamente. Recordando que $\mathscr{E}_t(0, c) = e^{ct}$, podemos expresar (3.2.2) como $D^u\mathscr{E}_t(0, c) = \mathscr{E}_t(-u, c)$, el cual es de la misma forma como (3.2.3). En consecuencia usamos funciones de la forma $\mathscr{E}_t(kv, c)$ (donde k es un entero) como alternativas a la solución de (3.1.8). Para probar esta conjetura consideremos la ecuación diferencial fraccionaria,

$$\left[D^1 + aD^{1/2} + bD^0\right] y(t) = 0, \tag{3.2.5}$$

el cual es de orden (2,2) con el polinomio indicial

$$P(x) = x^2 + ax + b \tag{3.2.6}$$

Por la analogía de EDO probemos la combinación lineal de $\mathscr{E}_t(0, c), \mathscr{E}_t(-1/2, c)$.

Esto es

$$\psi_1(t) = A\mathscr{E}_t(0, c) + \mathscr{E}_t(-1/2, c) \tag{3.2.7}$$

como posible solución. La aritmética muestra que el operador

$$P(D^{1/2}) = D^1 + aD^{1/2} + bD^0,$$

aplicado a (3.2.7), y haciendo uso de las propiedades de la función Miller-Ross, tenemos

$$\begin{aligned} P(D^{1/2})\psi_1(t) &= \left[D^1 + aD^{1/2} + bD^0\right] [A\mathscr{E}_t(0, c) + \mathscr{E}_t(-1/2, c)] \\ &= DA\mathscr{E}_t(0, c) + D\mathscr{E}_t(-1/2, c) + aAD^{1/2}\mathscr{E}_t(0, c) + aD^{1/2}\mathscr{E}_t(-1/2, c) \\ &+ bA\mathscr{E}_t(0, c) + b\mathscr{E}_t(-1/2, c) \end{aligned}$$

$$= cA\mathscr{E}_t(0,c) + c\mathscr{E}_t(-1/2,c) + \frac{t^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)} + aA\mathscr{E}_t(-1/2,c) + a\mathscr{E}_t(-1,c)$$

$$+ bA\mathscr{E}_t(0,c) + b\mathscr{E}_t(-1/2,c)$$

$$= cA\mathscr{E}_t(0,c) + c\mathscr{E}_t(-1/2,c) + \frac{t^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)} + aA\mathscr{E}_t(-1/2,c) + ca\mathscr{E}_t(0,c)$$

$$+ bA\mathscr{E}_t(0,c) + b\mathscr{E}_t(-1/2,c)$$

$$= (cA + ac + bA)\mathscr{E}_t(0,c) + (c + aA + b)\mathscr{E}_t(-1/2,c) + \frac{t^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)}$$

$$P(D^{1/2})\psi_1(t) = (cA + ac + bA)\mathscr{E}_t(0,c) + (c + aA + b)\mathscr{E}_t(-1/2,c) + \frac{t^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)}. \quad (3.2.8)$$

Ahora sea $A = \lambda$ y $c = \lambda^2$, donde λ es arbitrario, probablemente un número complejo. Luego (3.2.8) puede ser escrito como

$$P(D^{1/2})\psi_1(t) = \lambda P(\lambda)\mathscr{E}_t(0,\lambda^2) + P(\lambda)\mathscr{E}_t(-1/2,\lambda^2) + \frac{t^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)} \quad (3.2.9)$$

Si, en particular, λ es un cero de $P(x)$, entonces $P(\lambda) = 0$ y (3.2.9) asume la forma

$$P(D^{1/2})\psi_1(t) = \frac{t^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)} \neq 0, \quad (3.2.10)$$

independiente de la raíz de $P(x) = 0$. Luego $\psi_1(t)$ no es aun una solución de (3.2.5), nos estamos acercando. Supongamos que α y β son ceros de $P(x)$. Entonces si $\lambda = \alpha$,

$$\psi_1(t) = \alpha\mathscr{E}_t(0,\alpha^2) + \mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2) \quad (3.2.11)$$

Si definimos $\psi_2(t)$ como

$$\psi_2(t) = \beta\mathscr{E}_t(0,\beta^2) + \mathscr{E}_t(-1/2,\beta^2) \tag{3.2.12}$$

Luego de (3.2.10) (con α remplazado por β) vemos que

$$P(D^{1/2})\psi_2(t) = \frac{t^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)}.$$

En consecuencia si dejamos

$$\Psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t) = \alpha\mathscr{E}_t(0,\alpha^2) - \beta\mathscr{E}_t(0,\beta^2) + \mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2) - \mathscr{E}_t(-1/2,\beta^2) \tag{3.2.13}$$

resulta que

$$\left[D^1 + aD^{1/2} + bD^0\right]\Psi(t) \equiv 0, \tag{3.2.14}$$

y si $\alpha \neq \beta$ vemos que $\Psi(t)$ es una solución no trivial de (3.2.5), cualquiera diría que la solución seria simple.

Como acabamos de ver, la función $\Psi(t)$ dada por (3.2.13) es una solución de (3.2.5) si las raíces α y β de la ecuación indicial $P(x) = x^2 + ax + b = 0$ no son iguales.

¿Y si $\alpha = \beta$?. Si recordamos, anteriormente vimos que en este caso (para ecuaciones diferenciales ordinarias) $e^{\alpha t}$ y $te^{\alpha t}$ eran soluciones distintas de $P(D)y(t)$. Así que refiriéndose a (3.2.4), aparece una combinación lineal de términos de la forma

$$\mathscr{E}_t(0,\alpha^2), \mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2), t\mathscr{E}_t(0,\alpha^2), t\mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2), \mathscr{E}_t(1/2,\alpha^2), t\mathscr{E}_t(1/2,\alpha^2).$$

Es una probable solución de (3.2.5) cuando las raíces de $P(x) = 0$ son iguales. Si hacemos esta suposición, luego procediendo como anteriormente, encontramos que

$$\Psi(t) = (1 + 2\alpha^2 t)\mathscr{E}_t(0, \alpha^2) + \alpha\mathscr{E}_t(1/2, \alpha^2) + 2\alpha t\mathscr{E}_t(-1/2, \alpha^2) \tag{3.2.15}$$

es una solución de (3.2.5) cuando $\alpha = \beta$.

3.3. Método de la Transformada de Laplace

Uno de los métodos más sencillos para resolver una ecuación diferencial fraccionaria es utilizando la transformada de Laplace. Ya que sabemos como tomar la conversión de Laplace de derivadas fraccionarias, podríamos contemplar la idea del cálculo de la transformada de Laplace de una ecuación diferencial fraccionaria, la resolución de la transformación de la función desconocida, y luego invirtiéndola. Suena simple, pero veamos si es factible. En este pasaje damos algunos ejemplos de la solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de orden fraccionario.

Consideremos la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden (2,2)

$$\left[D^1 + aD^{1/2} + bD^0\right] y(t) = 0 \tag{3.3.1}$$

con el polinomio indicial

$$P(x) = x^2 + ax + b$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}\left\{\left[D^1 + aD^{1/2} + bD^0\right] y(t)\right\} = 0\\
&\mathscr{L}\left\{Dy(t)\right\} + a\mathscr{L}\left\{D^{1/2}y(t)\right\} + b\mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = 0\\
&sY(s) - y(0) + a\left[s^{1/2}Y(s) - D^{-1/2}y(0)\right] + bY(s) = 0\\
&Y(s)\left(s + as^{1/2} + b\right) - y(0) - aD^{-1/2}y(0) = 0\\
&Y(s) = \frac{y(0) + aD^{-1/2}y(0)}{s + as^{1/2} + b}
\end{aligned}
$$

Se hará $C = y(0) + aD^{-1/2}y(0)$, y suponiendo que es un constante finita no nula. Luego:

$$
Y(s) = \frac{C}{P(s^{1/2})}.
$$

Expandamos $P^{-1}(x)$ en fracciones parciales,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^2 + ax + b}\\
&\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right)\\
&\frac{1}{P(s^{1/2})} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s^{1/2}-\alpha} - \frac{1}{s^{1/2}-\beta}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora hagamos la siguiente descomposición:

$$
\frac{1}{s^{1/2}-\alpha} = \frac{1}{s^{-1/2}(s-\alpha^2)} + \frac{\alpha}{s-\alpha^2}
$$

Consideremos dos casos:

1° Caso cuando $\alpha \neq \beta$: Consideremos α y β raíces diferentes del polinomio indicial

$$\frac{1}{P(s^{1/2})} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s^{-1/2}(s-\alpha^2)} + \frac{\alpha}{s-\alpha^2} - \frac{1}{s^{-1/2}(s-\beta^2)} - \frac{\beta}{s-\beta^2}\right)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = C\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P(s^{1/2})}\right\}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{C}{\alpha-\beta}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P(s^{1/2})}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{C}{\alpha-\beta}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1/2}(s-\alpha^2)} + \frac{\alpha}{s-\alpha^2} - \frac{1}{s^{-1/2}(s-\beta^2)} - \frac{\beta}{s-\beta^2}\right\}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{C}{\alpha-\beta}\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1/2}(s-\alpha^2)}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s-\alpha^2}\right\}\right.$$
$$\left. - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1/2}(s-\beta^2)}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{s-\beta^2}\right\}\right]$$

usando la ecuación (2.8.2), se tiene

$$y(t) = \frac{C}{\alpha-\beta}\left[\mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2) + \alpha\mathscr{E}_t(0,\alpha^2) - \mathscr{E}_t(-1/2,\beta^2) - \beta\mathscr{E}_t(0,\beta^2)\right]$$
$$y(t) = \frac{C}{\alpha-\beta}\left[\alpha\mathscr{E}_t(0,\alpha^2) - \beta\mathscr{E}_t(0,\beta^2) + \mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2) - \mathscr{E}_t(-1/2,\beta^2)\right],$$

es la solución de la ecuación (3.3.1), cuando $\alpha \neq \beta$.

2° Caso cuando $\alpha = \beta$: De la expresión $Y(s) = \dfrac{C}{P(s^{1/2})}$, se tiene para $\alpha = \beta$

$$Y(s) = \frac{C}{(s^{1/2}-\alpha)^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a ambos miembros se tiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} &= C\mathscr{L}^{-1}\left\{\left[\frac{1}{s^{-1/2}(s-\alpha^2)}+\frac{\alpha}{s-\alpha^2}\right]^2\right\}\\
y(t) &= C\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1}(s-\alpha^2)^2}+\frac{2\alpha}{s^{-1/2}(s-\alpha^2)^2}+\frac{\alpha^2}{(s-\alpha^2)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= C\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1}(s-\alpha^2)^2}\right\}+2\alpha\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{-1/2}(s-\alpha^2)^2}\right\}+\right.\\
&\quad\left.\alpha^2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-\alpha^2)^2}\right\}\right],\ \text{usando la ecuación (2.8.3), se tiene}\\
y(t) &= C\left[t\mathscr{E}_t(-1,\alpha^2)+\mathscr{E}_t(0,\alpha^2)+2\alpha t\mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2)+\alpha\mathscr{E}_t(1/2,\alpha^2)+\right.\\
&\quad\left.\alpha^2 t\mathscr{E}_t(0,\alpha^2)\right],\ \text{aqui haciendo uso de la ecuación (1.7.19c), se tiene}\\
y(t) &= C\left[t\alpha^2\mathscr{E}_t(0,\alpha^2)+\mathscr{E}_t(0,\alpha^2)+2\alpha t\mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2)+\alpha\mathscr{E}_t(1/2,\alpha^2)\right.\\
&\quad\left.+\alpha^2 t\mathscr{E}_t(0,\alpha^2)\right]\\
y(t) &= C\left[2\alpha^2 t\mathscr{E}_t(0,\alpha^2)+\mathscr{E}_t(0,\alpha^2)+2\alpha t\mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2)+\alpha\mathscr{E}_t(1/2,\alpha^2)\right]\\
y(t) &= C\left[(1+2\alpha^2 t)\mathscr{E}_t(0,\alpha^2)+\alpha\mathscr{E}_t(1/2,\alpha^2)+2\alpha t\mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2)\right],
\end{aligned}$$

es la solución de la ecuación (3.3.1), cuando $\alpha=\beta$.

Ahora encontremos la transformada inversa de Laplace de

$$Y(s)=\frac{C}{(s^{1/2}-\alpha)^2},$$

usando la ecuación (2.8.13)

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = C\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}-\alpha)^2}\right\}$$

$$y(t) = C\left[2\alpha t\mathscr{E}_t(-1/2,\alpha^2) + (1+2\alpha^2 t)\mathscr{E}_t(0,\alpha^2) + \alpha\mathscr{E}_t(1/2,\alpha^2)\right].$$

Ejemplo 3.3. *Considere la ecuación diferencial fraccionaria* $Dy(t) - 2_0D_t^{1/2}y(t) + y(t) = 0$ *de orden (2,2).*

Solución* 3.1*.

$$[D - 2D^{\frac{1}{2}} + 1]y(t) = 0, \quad q = 2, \;\; v = \frac{1}{2},$$

el polinomio indicial es: $P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, entonces como $\alpha = \beta = 1$; la solución es:

$$y(t) = C\left[(1+2t)\mathscr{E}_t(0,1) + \mathscr{E}_t(1/2,1) + 2t\mathscr{E}_t(-1/2,1)\right],$$

donde $C = y(0) + 2_0D_t^{-1/2}y(0)$.

A continuación se muestra la gráfica de la solución de la ecuación diferencial fraccionaria, para $C = 1$

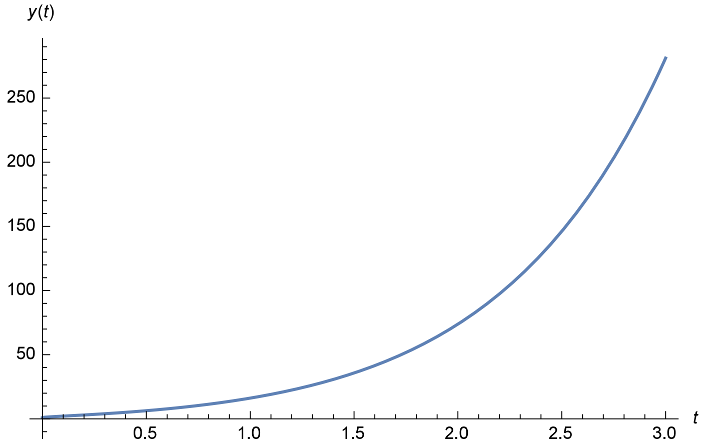


Figura 3.1: Gráfica de $y(t) = [(1+2t)\mathscr{E}_t(0,1) + \mathscr{E}_t(1/2,1) + 2t\mathscr{E}_t(-1/2,1)]$

Ejemplo 3.4. *Considere la ecuación diferencial fraccionaria* $Dy(t) - 2{}_0D_t^{1/2}y(t) - 15y(t) = 0$ *de orden (2,2).*

***Solución* 3.2.**

$$[D - 2D^{\frac{1}{2}} - 15]y(t) = 0, \quad q = 2, \;\; v = \frac{1}{2},$$

el polinomio indicial es: $P(x) = x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$, $\alpha = 5$ y $\beta = -3$ entonces como $\alpha \neq \beta$; la solución es:

$$y(t) = \frac{C}{8}\left[5\mathscr{E}_t(0,25) + 3\mathscr{E}_t(0,9) + \mathscr{E}_t(-1/2,25) - \mathscr{E}_t(-1/2,9)\right],$$

donde $C = y(0) + 2{}_0D_t^{-1/2}y(0)$.

A continuación se muestra la gráfica de la solución de la ecuación diferencial fraccionaria, para $C = 8$

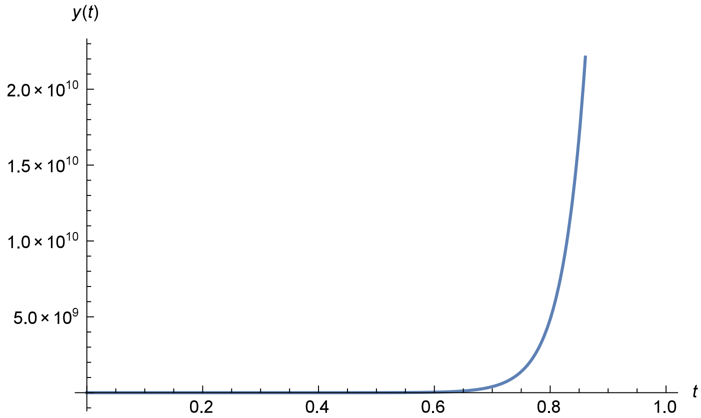


Figura 3.2: Gráfica de $y(t) = 5\mathscr{E}_t(0,25) + 3\mathscr{E}_t(0,9) + \mathscr{E}_t(-1/2,25) - \mathscr{E}_t(-1/2,9)$

Ejemplo 3.5. *Consideremos la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden (3,4)*

$$D^{3/4}y(t) - 3D^{1/4}y(t) = 0,\ D^{-1/4}y(t)\Big|_{t=0} = b_0,\ D^{-3/4}y(t)\Big|_{t=0} = b_1, \tag{3.3.2}$$

donde b_0 y b_1 son constantes.

***Solución* 3.3.** Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (3.3.2) se tiene

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}\left\{D^{3/4}y(t) - 3D^{1/4}y(t)\right\} = 0\\
&\mathscr{L}\left\{D^{3/4}y(t)\right\} - 3\mathscr{L}\left\{D^{1/4}y(t)\right\} = 0\\
&s^{3/4}Y(s) - D^{-1/4}y(t)\Big|_{t=0} - 3s^{1/4}Y(s) + 3D^{-3/4}y(t)\Big|_{t=0} = 0\\
&s^{3/4}Y(s) - b_0 - 3s^{1/4}Y(s) + 3b_1 = 0\\
&Y(s)\left(s^{3/4} - 3s^{1/4}\right) = b_0 - 3b_1\\
&Y(s) = (b_0 - 3b_1)\frac{1}{s^{3/4} - 3s^{1/4}}
\end{aligned}$$

$$Y(s) = (b_0 - 3b_1)\frac{1}{s^{1/4}\left(s^{1/2} - 3\right)}$$
$$Y(s) = (b_0 - 3b_1)\frac{s^{-1/4}}{s^{1/2} - 3}$$
$$y(t) = (b_0 - 3b_1)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-1/4}}{s^{1/2} - 3}\right\},\ (b_0 - 3b_1) = C$$
$$y(t) = Ct^{-1/4}\mathrm{E}_{1/2,3/4}(3t^{1/2}),\ \text{por (1.7.14)}$$

Por lo tanto $y(t) = Ct^{-1/4}\mathrm{E}_{1/2,3/4}(3t^{1/2})$, es la solución de la ecuación (3.3.2).

3.4. Método de Soluciones Linealmente Independientes

Usando algunas de las ideas que hemos recopilado de las secciones previas, ahora probaremos que una ecuación diferencial fraccionaria de orden (n, q) [ver (3.1.8)] tiene N soluciones linealmente independientes donde N es el entero más pequeño mayor o igual que nv. Formalmente escrito:

Teorema 3.2. *Sea*

$$[D^{nv} + a_1 D^{(n-1)v} + \ldots + a_n D^0]y(t) = 0 \tag{3.4.1}$$

una ecuación diferencial fraccionaria de orden (n, q) *y sea*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

el polinomio indicial correspondiente. Sea

$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\} \tag{3.4.2}$$

Entonces si N el entero más pequeño con la propiedad que $N \geq nv$,

$$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_N(t),$$

donde

$$y_{j+1}(t) = D^j y_1(t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

son N soluciones linealmente independientes de (3.4.1)

Demostración. Si tomamos la transformada de Laplace de (3.4.1), tenemos que

$$\mathscr{L}\{P(D^v)y(t)\} = 0. \tag{3.4.3}$$

Si $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(t)$, entonces

$$\mathscr{L}\{P(D^v)y(t)\} = P(s^v)Y(s) - \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)s^r, \tag{3.4.4}$$

donde $B_r(y)$ es una combinación lineal de términos de la forma

$$D^{kv-(r+1)}y(0), \quad k = rq+1, \ldots, n, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

En particular

$$B_0(y) = P(D^v)D^{-1}y(0) - a_n D^{-1}y(0).$$

De (3.4.3) y (3.4.4)

$$Y(s) = \frac{\sum\limits_{r=0}^{N-1} B_r(y)s^r}{P(s^v)}$$

y

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{y(s)\}$$

es una solución de (3.4.1). Sea

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\}. \tag{3.4.5}$$

Luego

$$\mathscr{L}\{P(D^v)y_1(t)\} = P(s^v)Y_1(s) - \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y_1)s^r. \tag{3.4.6}$$

Una pequeña extensión del teorema del valor inicial de la transformada de Laplace expone que si

$$\lim_{s\to\infty} s^{v+1}\mathscr{L}\{f(t)\} = L$$

entonces

$$D^v f(0) = L$$

para todo v, positivo, negativo, o cero.

Así $B_0(y_1) = 1$ y $B_r(y_1) = 0, r > 1.$

Por lo tanto (3.4.6) se convierte

$$\mathscr{L}\{P(D^v)y_1(t)\} = P(s^v)Y_1(s) - 1.$$

Pero $Y_1(s) = P^{-1}(s^v)$. En consecuencia $y_1(t)$ es una solución de (3.4.1).

Otra vez del valor inicial del teorema

$$D^k y_1(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-2. \tag{3.4.7}$$

En consecuencia

$$D^u[D^j y_1(t)] = D^j[D^u y_1(t)$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ y todo u. Por tanto

$$P(D^v)[D^j y_1(t)] = D^j[P(D^v)y_1(t)]$$

Pero $P(D^v)y_1(t) = 0$. Por lo tanto,

$$y_{j+1}(t) = D^j y_1(t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

son soluciones de (3.4.1) Afirmamos que $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_N(t)$, son linealmente independientes. Por (3.4.7),

$$\mathscr{L}\{D^j y_1(t)]\} = \frac{s^j}{P(s^v)}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-2,$$

y en consecuencia $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{N-1}(t)$ son linealmente independientes. Pero

$$\mathscr{L}\{D^{N-1} y_1(t)\} = \mathscr{L}\{y_N(t)\},$$

y si $N = nv$, entonces

$$y_N(0) = 1$$

mientras que si $N > nv$,

$$y_N(0) = \infty.$$

Ahora todo $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{N-1}(t)$ desaparece para $t = 0$. De modo que $y_N(t)$ es una solución de (3.4.1), tenemos $y_N(t)$ linealmente independientes de $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$. □

Ejemplo 3.6. *Resolver la ecuación diferencial fraccionaria de orden* $(3, 2)$

$$\left[D^{3/2} - 2D^1 - D^{1/2} + 2D^0\right] y(t) = 0 \tag{3.4.8}$$

***Solución* 3.4.** Tenemos $n = 3$, $q = 2$ y $v = 1/2$, $N \geq nv = 2 \Rightarrow N = 2$.

Entonces 3.4.8 tiene 2 soluciones linealmente independientes, $y_1(t)$ y $y_2(t)$, esto es por el teorema 3.2. Donde: $y_{j+1}(t) = D^j y_1(t),\ j = 0, 1$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de (3.4.8) se tiene

$$\left[s^{3/2}Y(s) - sD^{-1/2}y(0) - D^{1/2}y(0)\right] - 2\left[sY(s) - y(0)\right]$$
$$- \left[s^{1/2}Y(s) - D^{-1/2}y(0)\right] + 2Y(s) = 0$$
$$y(s)\left(s^{3/2} - 2s - s^{-1/2} + 2\right) = D^{1/2}y(0) - 2y(0) - D^{-1/2}y(0) + sD^{-1/2}y(0)$$

$$y(s) = \frac{D^{1/2}y(0) - 2y(0) - D^{-1/2}y(0) + sD^{-1/2}y(0)}{s^{3/2} - 2s - s^{-1/2} + 2}$$
$$y(s) = \frac{A}{P(s^{1/2})} + \frac{Bs}{P(s^{1/2})},$$

donde

$$A = D^{1/2}y(0) - 2y(0) - D^{-1/2}y(0)$$
$$B = D^{-1/2}y(0).$$

El polinomio indicial es $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x-1)(x+1)$, donde:

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$.

$$y(t) = A\mathscr{L}^{-1}\left\{P^{-1}(s^{1/2})\right\} + B\mathscr{L}^{-1}\left\{sP^{-1}(s^{1/2})\right\}$$
$$y(t) = Ay_1(t) + By_2(t),\ y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{P^{-1}(s^{1/2})\right\},\ y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{sP^{-1}(s^{1/2})\right\}$$
$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{P^{-1}(s^{1/2})\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2} - 2s - s^{1/2} + 2}\right\}$$
$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}-2)(s^{1/2}-1)(s^{1/2}+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{C_1}{s^{1/2}-2} + \frac{C_2}{s^{1/2}-1} + \frac{C_3}{s^{1/2}+1}\right\}$$
$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^{1/2}-2} - \frac{1/2}{s^{1/2}-1} + \frac{1/6}{s^{1/2}+1}\right\}$$
$$y_1(t) = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}-2}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}-1}\right\} + \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}+1}\right\}$$

haciendo uso de la ecuación (2.8.9), se tiene:

$$y_1(t) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_1^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv, \alpha_1^q\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_2^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv, \alpha_2^q\right) + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_3^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv, \alpha_3^q\right)$$

$$y_1(t) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{1} 2^{1-k}\mathscr{E}_t(-kv,4) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} 1^{1-k}\mathscr{E}_t(-kv,1) + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{1}(-1)^{1-k}\mathscr{E}_t(-kv,1)$$

$$y_1(t) = \frac{1}{3}\Big[2\mathscr{E}_t(0,4) + \mathscr{E}_t(-1/2,4)\Big] - \frac{1}{2}\Big[\mathscr{E}_t(0,1) + \mathscr{E}_t(-1/2,1)\Big]$$
$$+ \frac{1}{6}\Big[-\mathscr{E}_t(0,1) + \mathscr{E}_t(-1/2,1)\Big]$$

$$y_1(t) = \frac{1}{3}\mathscr{E}_t(-1/2,4) + \frac{2}{3}\mathscr{E}_t(0,4) - \frac{1}{3}\mathscr{E}_t(-1/2,1) - \frac{2}{3}\mathscr{E}_t(0,1)\,,$$

usando la ecuación (1.7.20a) se tiene

$$y_1(t) = \frac{1}{3}\Big[-\mathscr{E}_t(1/2,1) + 4\mathscr{E}_t(1/2,4) - 2\mathscr{E}_t(0,1) + 2\mathscr{E}_t(0,4)\Big]$$

$$y_2(t) = Dy_1(t)$$

para esto utilizaremos la ecuación (1.7.21a)

$$y_2(t) = Dy_1(t) = \frac{1}{3}\Bigg[-\mathscr{E}_t(1/2,1) - \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + 16\mathscr{E}_t(1/2,4) + \frac{4t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} - 2\mathscr{E}_t(0,1)$$
$$- \frac{2t^{-1}}{\Gamma(0)} + 8\mathscr{E}_t(0,4) + \frac{2t^{-1}}{\Gamma(0)}\Bigg]$$

$$y_2(t) = Dy_1(t) = \frac{1}{3}\Big[-\mathscr{E}_t(1/2,1) + 16\mathscr{E}_t(1/2,4) - 2\mathscr{E}_t(0,1) + 8\mathscr{E}_t(0,4)\Big] + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

Por lo tanto la solución de (3.4.8) es

$$y(t) = \frac{A}{3}\Big[-\mathscr{E}_t(1/2,1) + 4\mathscr{E}_t(1/2,4) - 2\mathscr{E}_t(0,1) + 2\mathscr{E}_t(0,4)\Big]$$
$$+ B\Big(\frac{1}{3}\Big[-\mathscr{E}_t(1/2,1) + 16\mathscr{E}_t(1/2,4) - 2\mathscr{E}_t(0,1) + 8\mathscr{E}_t(0,4)\Big] + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\Big).$$

A continuación se muestra la gráfica de la solución de la ecuación diferencial fraccionaria, en términos de la función de Miller-Ross.

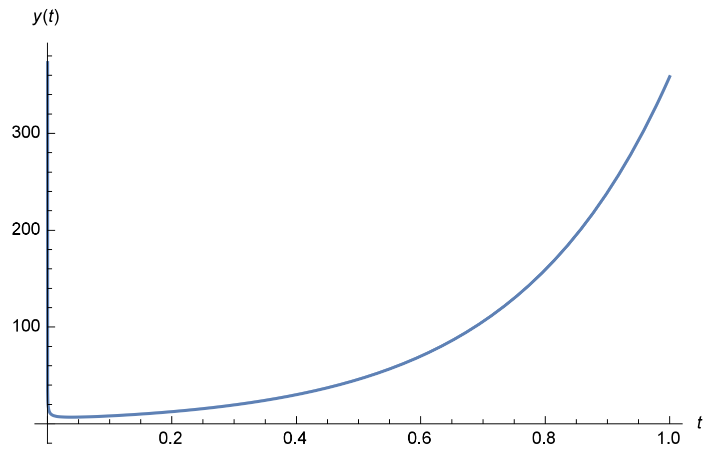


Figura 3.3: Gráfica de la solución de ecuación diferencial fraccionaria en términos de la función de Miller-Ross, para $A = 1;\ B = 1$

Otra solución para 3.4.8 en términos de la función de Mittag-Leffer de dos parámetros es usando la ecuación 1.7.18

$$
\begin{aligned}
y(t) = {} & \frac{A}{3}\Big[-t^{1/2}\mathrm{E}_{1,3/2}\left(t\right) + 4t^{1/2}\mathrm{E}_{1,3/2}\left(4t\right) - 2\mathrm{E}_{1,1}\left(t\right) + 2\mathrm{E}_{1,1}\left(4t\right) \Big] \\
& + B\Big(\frac{1}{3}\Big[-t^{1/2}\mathrm{E}_{1,3/2}\left(t\right) + 16t^{1/2}\mathrm{E}_{1,3/2}\left(4t\right) - 2\mathrm{E}_{1,1}\left(t\right) + 8\mathrm{E}_{1,1}\left(4t\right) \Big] + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\Big).
\end{aligned}
$$

A continuación se muestra la gráfica de la solución de la ecuación diferencial fraccionaria, en términos de la función de Mittag-Leffer de dos parámetros.

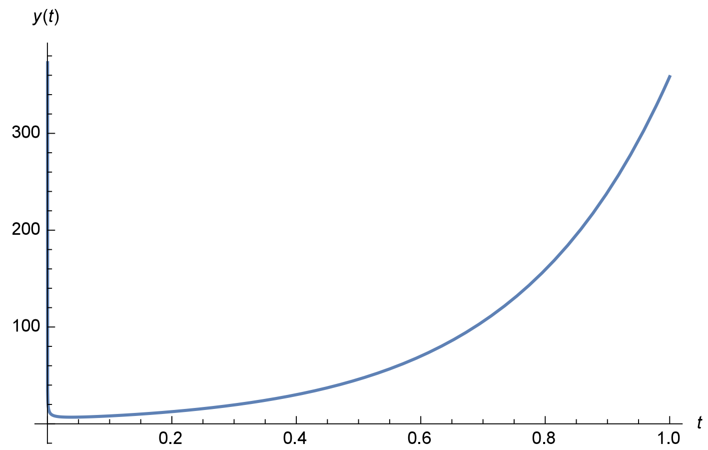


Figura 3.4: Gráfica de la solución de ecuación diferencial fraccionaria en términos de la función de Mittag-Leffer de dos parámetros, para $A = 1;\ B = 1$.

Ejemplo 3.7. *Hallar la solución de la ecuación diferencial fraccionaria*

$$[D^{2v} + a_1 D^v + a_2]y(t) = 0 \tag{3.4.9}$$

de orden $(2, q)$.

***Solución* 3.5.** El polinomio indicial correspondiente es

$$P(x) = x^2 + a_1 x + a_2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

En ese caso $N = 1$, por tanto (3.4.9) tiene solo una solución $y_1(t)$. De (3.4.2)

$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\}.$$

Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$\begin{aligned}
P^{-1}(s^v) &= \frac{1}{(s^v-\alpha_1)(s^v-\alpha_2)} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{1}{s^v-\alpha_1} - \frac{1}{s^v-\alpha_2}\right)\\
\mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\} &= \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v-\alpha_1} - \frac{1}{s^v-\alpha_2}\right\}\\
\mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\} &= \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v-\alpha_1}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v-\alpha_2}\right\}\right]\\
y_1(t) &= A\left[\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_1^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv,\alpha_1^q\right) - \sum_{k=0}^{q-1}\alpha_1^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv,\alpha_2^q\right)\right]\\
y_1(t) &= A\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_i^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv,\alpha_i^q\right)\\
y_1(t) &= Ae_i(t), \;\; \text{donde } e_i(t) = \sum_{k=0}^{q-1}\alpha_i^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv,\alpha_i^q\right),\; i=1,2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y_1(t) = A[e_1(t) - e_2(t)]$$

es la solución de (3.4.9), si $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

También podemos escribir $e_i(t)$ en términos de la función de Mittag-Leffler de un parámetro

$$e_i(t) = \alpha_i^{q-1}\mathrm{E}_v(\alpha_i t^v) + (\alpha_i t)^{-1}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(\alpha_i t^v)^j}{\Gamma(jv)}. \tag{3.4.10}$$

Luego la solución $y_1(t)$, también se puede expresar de la siguiente forma

$$y_1(t) = A\left[\alpha_i^{q-1}\mathrm{E}_v(\alpha_i t^v) + (\alpha_i t)^{-1}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(\alpha_i t^v)^j}{\Gamma(jv)}\right],\; i=1,2.$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$P^{-1}(s^v) = \frac{1}{(s^v - \alpha_1)^2}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^v - \alpha_1)^2}\right\}$$

Por lo tanto

$$y_1(t) = Ae_1(t) * e_1(t)$$

usando la ecuación 2.8.11 de la observación 8, se tiene

$$y_1(t) = A\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_1^{2q-j-k-2}\Big\{t\mathscr{E}_t(-(j+k)v, \alpha_1^q) + (j+k)v\mathscr{E}_t(1-(j+k)v, \alpha_1^q)\Big\}$$

es la solución de (3.4.9), si $\alpha_1 = \alpha_2$. En ambas ecuaciones anteriores, A es una constante arbitraria.

Ejemplo 3.8. *Resolver la ecuación diferencial fraccionaria de orden* $(2,2)$

$$[D - 4D^{\frac{1}{2}} + 3]y(t) = 0 \tag{3.4.11}$$

***Solución* 3.6.** En este caso $N = 1$, por lo tanto 3.4.11 tiene solo una solución $y_1(t)$.

$$[D - 4D^{\frac{1}{2}} + 3]y(t) = 0, \quad q = 2, \;\; v = \frac{1}{2},$$

el polinomio indicial es: $P(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$, entonces

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\}$$

$$
\begin{aligned}
P^{-1}(s^v) &= \frac{1}{(s^v-3)(s^v-1)}\\
P^{-1}(s^{\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{(s^{\frac{1}{2}}-3)(s^{\frac{1}{2}}-1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-3} - \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-1}\right]\\
P^{-1}(s^{\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-3} - \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-1}\right]\\
\mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^{\frac{1}{2}})\} &= \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-1}\right\}\right]\\
y_1(t) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_i^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv,\alpha_i^q\right)\right],\ i=1,2\\
y_1(t) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{1}\alpha_i^{1-k}\mathscr{E}_t\left(-kv,\alpha_i^2\right)\right], \text{donde,}\quad \alpha_1=3,\alpha_2=1\\
y_1(t) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{1}3^{1-k}\mathscr{E}_t\left(-kv,9\right) - \sum_{k=0}^{1}\mathscr{E}_t\left(-kv,1\right)\right]\\
y_1(t) &= \frac{1}{2}\left[3\mathscr{E}_t\left(0,9\right) + \mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2},9\right) - \mathscr{E}_t\left(0,1\right) - \mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2},1\right)\right]
\end{aligned}
$$

usando la ecuación 1.7.20a también se tiene

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\left[3\mathscr{E}_t\left(0,9\right) + 9\mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2},9\right) - \mathscr{E}_t\left(0,1\right) - \mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2},1\right)\right].$$

La solución también se puede expresar en términos de la función de Mittag-Leffer de dos parámetros usando la ecuación 1.7.18.

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\left[3\mathrm{E}_{1,1}\left(9t\right) + 9t^{1/2}\mathrm{E}_{1,3/2}\left(9t\right) - \mathrm{E}_{1,1}\left(t\right) - t^{1/2}\mathrm{E}_{1,3/2}\left(t\right)\right].$$

Ejemplo 3.9. *Resolver la ecuación diferencial fraccionaria de orden* $(2,2)$

$$[D - 2D^{\frac{1}{2}} + 1]y(t) = 0 \tag{3.4.12}$$

***Solución* 3.7.** En este caso $N = 1$, por lo tanto 3.4.12 tiene solo una solución $y_1(t)$.

$$[D - 2D^{\frac{1}{2}} + 1]y(t) = 0, \quad q = 2, \;\; v = \frac{1}{2},$$

el polinomio indicial es: $P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, entonces

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\} \\
P^{-1}(s^v) &= \frac{A}{(s^v - 1)^2} \\
\mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^{\frac{1}{2}})\} &= A\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}} - 1)^2}\right\}
\end{aligned}$$

usando la ecuación 2.8.11 de la observación 8, se tiene

$$\begin{aligned}
y(t) &= A\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\left[t\mathscr{E}_t\left(-\frac{(j+k)}{2},1\right) + \frac{(j+k)}{2}\mathscr{E}_t\left(1 - \frac{(j+k)}{2},1\right)\right] \\
y(t) &= A\sum_{j=0}^{1}\left[t\mathscr{E}_t\left(-\frac{j}{2},1\right) + \frac{j}{2}\mathscr{E}_t\left(1 - \frac{j}{2},1\right) + t\mathscr{E}_t\left(-\frac{(j+1)}{2},1\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{(j+1)}{2}\mathscr{E}_t\left(1 - \frac{(j+1)}{2},1\right)\right] \\
y(t) &= A\left[t\mathscr{E}_t\,(0,1) + t\mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2},1\right) + \frac{1}{2}\mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2},1\right) + t\mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2},1\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2},1\right) + t\mathscr{E}_t\,(-1,1) + \mathscr{E}_t\,(0,1)\right] \\
y(t) &= A\left[t\mathscr{E}_t\,(0,1) + \mathscr{E}_t\,(0,1) + 2t\mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2},1\right) + \mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2},1\right) + t\mathscr{E}_t\,(-1,1)\right] \\
y(t) &= A\left[t\mathscr{E}_t\,(0,1) + t\mathscr{E}_t\,(0,1) + \mathscr{E}_t\,(0,1) + 2t\mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2},1\right) + \mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2},1\right)\right] \\
y(t) &= A\left[(1+2t)\mathscr{E}_t\,(0,1) + 2t\mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2},1\right) + \mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2},1\right)\right],
\end{aligned}$$

es la misma solución del ejemplo 3.3 empleando el método de la transformada de Laplace, cuando $\alpha = \beta$, además se ha utilizado la ecuación 1.7.19c.

3.5. Representación explicita de la solución

Un cálculo explícito de las soluciones $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_N(t)$ de (3.4.1), (en términos de las funciones $\mathscr{E}_t\left(w, c\right)$,) no es tarea fácil. Sin embargo si los ceros del polinomio indicial $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ son distintos, es posible sin mucho esfuerzo obtener una representación bastante simple para este tipo de soluciones. Lo haremos por dos métodos diferentes (ver teorema 3.3). La primera prueba usa la transformada de Laplace.

Teorema 3.3. *Sea*

$$[D^{nv} + a_1 D^{(n-1)v} + \ldots + a_n D^0]y(t) = 0 \tag{3.5.1}$$

una ecuación diferencial fraccionaria de orden (n, q) *y sea* $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ *el polinomio indicial correspondiente. Sea* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *con* $\alpha_i \neq \alpha_j$*, para* $i \neq j$ *son ceros de* $P(x)$ *y sea*

$$A_m^{-1} = DP(\alpha_m), \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{3.5.2}$$

Entonces

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{n} A_m \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_m^{q-k-1} \mathscr{E}_t\left(-kv, \alpha_m^q\right) \tag{3.5.3}$$

es una solución de (3.5.1).

Demostración. De (3.4.2) sabemos que

$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\}, \quad v = \frac{1}{q}, \tag{3.5.4}$$

es una solución de (3.5.1). Pero

$$P^{-1}(s^v) = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{s-\alpha_n}, \tag{3.5.5}$$

y de la ecuación (2.8.5) de la definición (2.3),

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha - a}\right\} = \sum_{j=1}^{q} a^{j-1}\mathscr{E}_t(j\alpha - 1, a^q) \tag{3.5.6}$$

Si hacemos el cambio de índice $k = q - j$, se tiene

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha - a}\right\} = \sum_{k=0}^{q-1} a^{q-k-1}\mathscr{E}_t(-k\alpha, a^q) \tag{3.5.7}$$

Usando esta fórmula vemos que la transformada inversa de Laplace de

$$P^{-1}(s^v) = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{s-\alpha_n}$$

produce

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{n} A_m \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_m^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv, \alpha_m^q\right).$$

□

Ahora demostremos el teorema anterior sin hacer uso de la transformada de Laplace.

Demostración. La función y_1 de (3.5.3) es la y_1 del Teorema 3.2. Por lo tanto $y_1, y_2, \ldots, y_N$ de aquel teorema puede ser construido de (3.5.3). Recordemos que

$$D^{pv}\mathscr{E}_t\left(-kv, a\right) = \mathscr{E}_t\left(-(k+p)v, a\right), \tag{3.5.8}$$

con $kv < 1$, para $k = 0, 1, \ldots, q-1$. Si definimos $e(t)$ como

$$e(t) = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv, \alpha^q\right) \tag{3.5.9}$$

(donde por el momento α es una constante arbitraria), entonces (3.5.8) implica que

$$D^v e(t) = \alpha e(t)$$

$(\mathscr{E}_t\left(-qv, \alpha^q\right) = \mathscr{E}_t\left(-1, \alpha^q\right) = \alpha^q\mathscr{E}_t\left(0, \alpha^q\right))$. Para p un entero positivo mayor que 1,

$$D^{pv}e(t) = \alpha^p e(t) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\alpha^{p-1-k}t^{-1-kv}}{\Gamma(-kv)}. \tag{3.5.10}$$

La fórmula (3.5.10) es también válido para $p = 0$ o $p = 1$, en esos casos la suma en (3.5.10) es vacía. En consecuencia escribimos

$$P(D^v)e(t) = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}D^{pv}e(t), \;\; a_0 = 1, \tag{3.5.11}$$

(3.5.10) implica que

$$P(D^v)e(t) = P(\alpha)e(t) + \sum_{p=2}^{n} a_{n-p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\alpha^{p-1-k} t^{-1-kv}}{\Gamma(-kv)}. \tag{3.5.12}$$

Ahora si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son ceros distintos de $P(x)$, y si

$$e_j(t) = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_j^{q-k-1} \mathscr{E}_t \left(-kv, \alpha_j^q\right), \tag{3.5.13}$$

entonces, de (3.5.12),

$$\begin{aligned} P(D^v)\left[\sum_{m=1}^{n} C_m e_m(t)\right] &= \sum_{m=1}^{n} C_m P(\alpha_m) e_m(t) \\ &+ \sum_{m=1}^{n} C_m \sum_{p=2}^{n} a_{n-p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\alpha_m^{p-1-k} t^{-1-kv}}{\Gamma(-kv)} \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

para cualquiera de las constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Pero $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las raíces de $P(x) = 0$, el primer término al lado derecho desaparece, luego

$$P(D^v)\left[\sum_{m=1}^{n} C_m e_m(t)\right] = \sum_{p=2}^{n} a_{n-p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{-1-kv}}{\Gamma(-kv)} \left[\sum_{m=1}^{n} C_m \alpha_m^{p-1-k}\right]. \tag{3.5.15}$$

Así podemos escoger C_m tal que el lado derecho de (3.5.15) desaparezca, entonces

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{n} C_m e_m(t) \tag{3.5.16}$$

será una solución de (3.5.1). Ignorando la solución trivial $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, vemos que si dejamos $C_m = A_m$ donde los A_m, son dados por

$$A_m^{-1} = DP(\alpha_m), \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

luego por el Teorema 1.3, implica que la suma en corchetes en (3.5.15) es cero. Así

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{n} A_m e_m(t) \tag{3.5.17}$$

es una solución de (3.5.1). Pero esto es precisamente (3.5.3). $\square$

Ejemplo 3.10. *Como un ejemplo concreto, sea la ecuación diferencial fraccionaria de orden (7,3).*

$$[D^{7v} + a_1 D^{6v} + a_2 D^{5v} + a_3 D^{4v} + a_4 D^{3v} + a_5 D^{2v} + a_6 D^{v} + a_7 D^{0}]y(t) = 0 \tag{3.5.18}$$

Luego del Teorema 3.3, se tiene

$$y1(t) = \sum_{m=1}^{7} A_m \left[\alpha_m^2 \mathscr{E}_t\left(0, \alpha_m^3\right) + \alpha_m \mathscr{E}_t\left(-v, \alpha_m^3\right) + \mathscr{E}_t\left(-2v, \alpha_m^3\right)\right] \tag{3.5.19}$$

(donde $v = 1/3$) es una solución de (3.5.18) y $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n7}$ son ceros distintos del polinomio indicial $P(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$. Para calcular $y_2(t)$ diferenciamos $y_1(t)$ para obtener

$$\begin{aligned} y_2(t) = Dy_1(t) &= \sum_{m=1}^{7} A_m \sum_{k=0}^{2} \alpha_m^{5-k} \mathscr{E}_t\left(-kv, \alpha_m^3\right) \\ &+ \sum_{k=0}^{2} \frac{t^{-kv-1}}{\Gamma(-kv)} \sum_{m=1}^{7} \alpha_m^{2-k} A_m. \end{aligned}$$

Pero del Teorema 1.3

$$\sum_{m=1}^{7} \alpha_m^j A_m = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 5.$$

En consecuencia una segunda solución independiente de (3.5.18) es

$$y_2(t) = \sum_{m=1}^{7} A_m \alpha_m^3 \left[\alpha_m^2 \mathscr{E}_t \left(0, \alpha_m^3\right) + \alpha_m \mathscr{E}_t \left(-v, \alpha_m^3\right) + \mathscr{E}_t \left(-2v, \alpha_m^3\right) \right]. \tag{3.5.20}$$

Un similar argumento establece que

$$y_3(t) = D^2 y_1(t) \sum_{m=1}^{7} A_m \alpha_m^6 \left[\alpha_m^2 \mathscr{E}_t \left(0, \alpha_m^3\right) + \alpha_m \mathscr{E}_t \left(-v, \alpha_m^3\right) + \mathscr{E}_t \left(-2v, \alpha_m^3\right) \right] \tag{3.5.21}$$

como una tercera solución independiente de (3.5.18).

En un intento de construir soluciones explicitas de una ecuación diferencial fraccionaria cuando el polinomio indicial tiene múltiples ceros, haremos uso del Teorema 1.4.

Ejemplo 3.11. *Sea*

$$[D^{3v} + a_1 D^{2v} + a_2 D + a_3 D^0] y(t) = 0 \tag{3.5.22}$$

una ecuación diferencial fraccionaria de orden $(3, q)$*, sea* α_1 *un cero simple y* α_2 *un cero doble del polinomio indicial*

$$P(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

Del Teorema 3.2 sabemos que

$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\}$$

es una solución de (3.5.22). Determinaremos $y_1(t)$ explícitamente. El polinomio $P(x)$ puede escribirse de forma factorizada como

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)^2,$$

y la expansión en fracciones parciales de $P^{-1}(s^v)$ es

$$P^{-1}(s^v) = \frac{B_1}{s^v - \alpha_1} + \frac{B_2}{s^v - \alpha_2} + \frac{C_1}{(s^v - \alpha_2)^2}. \tag{3.5.23}$$

Por la ecuación 1.3.2 del Teorema 1.4 y la ecuación 1.3.3,

$n = 1 + (2)(1) + (3)(0) = 3,$

$$\sum_{k=1}^{2} \alpha_k^m B_k + m \sum_{k=1}^{1} \alpha_{k+1}^{m-1} C_k + \frac{1}{2} m(m-1) \sum_{k=1}^{0} \alpha_{k+2}^{m-2} D_k = 0,$$

$$\alpha_1^m B_1 + \alpha_2^m B_2 + m\alpha_2^{m-1} C_1 = 0;\ m = 0, 1$$

$$\sum_{k=1}^{2} \alpha_k^2 B_k + 2 \sum_{k=1}^{1} \alpha_{k+1}^1 C_k + \frac{1}{2}(2)(1) \sum_{k=1}^{0} \alpha_{k+2}^0 D_k = 1$$

$$\alpha_1^2 B_1 + \alpha_2^2 B_2 + 2\alpha_2 C_1 = 1$$

Pero por la transformada inversa de Laplace de $P^{-1}(s^v)$, se tiene la solución de la ecuación diferencial fraccionaria

$$y_1(t) = B_1 e_1(t) + B_2 e_2(t) + C_1 e_2(t) * e_2(t), \tag{3.5.24}$$

donde

$$e_i(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v - \alpha_i}\right\} = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_i^{q-k-1} \mathscr{E}_t(-kv, \alpha_i^q),\ i = 1, 2.$$

y

$$\begin{aligned} e_2(t) * e_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^v - \alpha_2)^2}\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1} \alpha_2^{2q-j-k-2} \left\{t\mathscr{E}_t(-(j+k)v, \alpha_2^q) + (j+k)v\mathscr{E}_t(1-(j+k)v, \alpha_2^q)\right\} \end{aligned}$$

Incluso para ser más explícitos, vemos fácilmente que en este ejemplo concreto la solución de tres ecuaciones lineales simultáneas es

$$B_1 = \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2};\ B_2 = -\frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2};\ C_1 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial fraccionaria será

$$y(t) = \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)^2}\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_1^{q-k-1}\mathscr{E}_t(-kv,\alpha_1^q) - \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)^2}\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_2^{q-k-1}\mathscr{E}_t(-kv,\alpha_2^q)$$
$$+\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_2^{2q-j-k-2}\left\{t\mathscr{E}_t(-(j+k)v,\alpha_2^q)+(j+k)v\mathscr{E}_t(1-(j+k)v,\alpha_2^q)\right\}. \tag{3.5.25}$$

Ejemplo 3.12. *Resolver la ecuación diferencial fraccionaria de orden* $(3,2)$

$$[D^{\frac{3}{2}} - 5D + 7D^{\frac{1}{2}} - 3]y(t) = 0 \tag{3.5.26}$$

***Solución* 3.8.**

$$[D^{\frac{3}{2}} - 5D + 7D^{\frac{1}{2}} - 3]y(t) = 0, \quad q = 2, \;\; v = \frac{1}{2},$$

el polinomio indicial es: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-3)(x-1)^2$, entonces

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\}$$

$$P^{-1}(s^v) = \frac{B_1}{s^v-3} + \frac{B_2}{s^v-1} + \frac{C_1}{(s^v-1)^2}$$
$$P^{-1}(s^{\frac{1}{2}}) = \frac{B_1}{s^{\frac{1}{2}}-3} + \frac{B_2}{s^{\frac{1}{2}}-1} + \frac{C_1}{(s^{\frac{1}{2}}-1)^2}$$

$$\alpha_1^m B_1 + \alpha_2^m B_2 + m\alpha_2^{m-1}C_1;\; m = 0,1;\; \alpha_1^2 B_1 + \alpha_2^2 B_2 + 2\alpha_2 C_1 = 1$$

$$B_1 = \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)^2};\; B_2 = -\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)^2};\; C_1 = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}$$

$$\alpha_1 = 3;\ \alpha_2 = 1 \rightarrow B_1 = \frac{1}{4},\ \ B_2 = -\frac{1}{4},\ \ C_1 = -\frac{1}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned}
P^{-1}(s^{\frac{1}{2}}) &= \frac{\frac{1}{4}}{s^{\frac{1}{2}}-3} - \frac{\frac{1}{4}}{s^{\frac{1}{2}}-1} - \frac{\frac{1}{2}}{(s^{\frac{1}{2}}-1)^2} \\
\mathscr{L}^{-1}\{P^{-1}(s^{\frac{1}{2}})\} &= \frac{1}{4}\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-1}\right\}\right] - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}}-1)^2}\right\} \\
y(t) &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_i^{q-k-1}\mathscr{E}_t\left(-kv, \alpha_i^q\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\left[t\mathscr{E}_t\left(-\frac{(j+k)}{2}, 1\right) + \frac{(j+k)}{2}\mathscr{E}_t\left(1-\frac{(j+k)}{2}, 1\right)\right] \\
y(t) &= \frac{1}{4}\left[\sum_{k=0}^{1}3^{1-k}\mathscr{E}_t\left(-kv, 9\right) - \sum_{k=0}^{1}\mathscr{E}_t\left(-kv, 1\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\left[t\mathscr{E}_t\left(-\frac{(j+k)}{2}, 1\right) + \frac{(j+k)}{2}\mathscr{E}_t\left(1-\frac{(j+k)}{2}, 1\right)\right] \\
y(t) &= \frac{1}{4}\left[3\mathscr{E}_t\left(0, 9\right) + \mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2}, 9\right) - \mathscr{E}_t\left(0, 1\right) - \mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[(1+2t)\mathscr{E}_t\left(0, 1\right) + 2t\mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2}, 1\right) + \mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right] \\
y(t) &= \frac{1}{4}\left[3\mathscr{E}_t\left(0, 9\right) + \mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2}, 9\right)\right] - \left(t+\frac{3}{4}\right)\mathscr{E}_t\left(0, 1\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2}, 1\right) - \left(t+\frac{1}{4}\right)\mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2}, 1\right),
\end{aligned}$$

es la solución de la ecuación diferencial fraccionaria 3.5.26 en términos de la función de Miller-Ross.

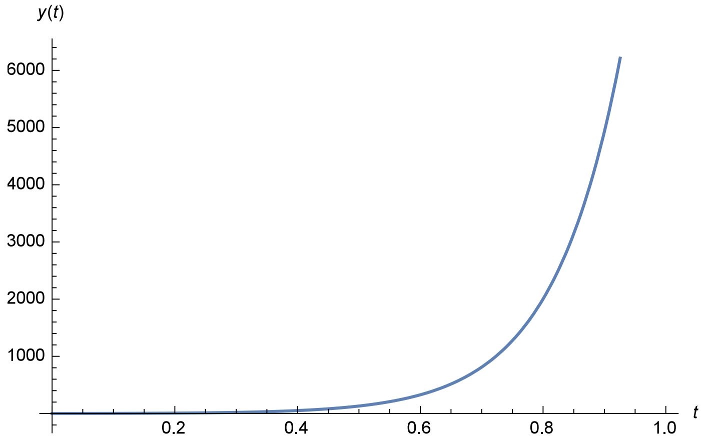


Figura 3.5: Gráfica de la solución de $[D^{\frac{3}{2}} - 5D + 7D^{\frac{1}{2}} - 3]y(t) = 0$, en términos de la función de Miller-Ross.

También la solución de (3.5.26) se puede expresar de la siguiente forma

$$y(t) = \frac{1}{4}\left[3e^{9t} + \mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2}, 9\right)\right] - \left(t + \frac{3}{4}\right)e^t - \frac{1}{2}\mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2}, 1\right) - \left(t + \frac{1}{4}\right)\mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

Encontraremos la solución de (3.5.26) en términos de la función de Mittag-Leffler de un parámetro, sabemos que

$$e_i(t) = \alpha_i^{q-1}\mathrm{E}_v\left(\alpha_i t^v\right) + (\alpha_i t)^{-1}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{(\alpha_i t^v)^j}{\Gamma(jv)}$$

Luego

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - 3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - 1}\right\} = \alpha_i\mathrm{E}_{1/2}\left(\alpha_i t^{1/2}\right) + (\alpha_i t)^{-1}\sum_{j=1}^{1}\frac{(\alpha_i t^{1/2})^j}{\Gamma(j/2)}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - 3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - 1}\right\} &= 3\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right) + \frac{1}{3t}\frac{3t^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \\ &\quad - \left(\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right) + \frac{1}{t}\frac{t^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\right)\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-3}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}-1}\right\}=3\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right)-\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{4}\left[3\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right)-\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)\right]-\frac{1}{2}\Bigg[(1+2t)\mathscr{E}_t\left(0,1\right)+2t\mathscr{E}_t\left(-\frac{1}{2},1\right)$$
$$+\mathscr{E}_t\left(\frac{1}{2},1\right)\Bigg]$$
$$y(t)=\frac{1}{4}\left[3\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right)-\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[2t\mathrm{E}_1\left(t\right)+\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)+2t\mathscr{E}_t\left(-1/2,1\right)\right]$$
$$y(t)=\frac{3}{4}\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right)-\frac{1}{4}\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)-t\mathrm{E}_1\left(t\right)-\frac{1}{2}\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)-t\mathscr{E}_t\left(-1/2,1\right)$$
$$y(t)=\frac{3}{4}\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right)-\frac{3}{4}\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)-t\mathrm{E}_1\left(t\right)-t\mathscr{E}_t\left(-1/2,1\right)$$
$$y(t)=\frac{3}{4}\left[\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right)-\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)\right]-t\left[\mathrm{E}_1\left(t\right)+\mathscr{E}_t\left(-1/2,1\right)\right]$$
$$y(t)=\frac{3}{4}\left[\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right)-\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)\right]-t\left[\mathrm{E}_1\left(t\right)+\mathscr{E}_t\left(1/2,1\right)+\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}\right]$$
$$y(t)=\frac{3}{4}\left[\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right)-\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)\right]-t\mathrm{E}_1\left(t\right)-t\mathscr{E}_t\left(1/2,1\right)-\frac{t^{1/2}}{\Gamma(1/2)}$$
$$y(t)=\frac{3}{4}\left[\mathrm{E}_{1/2}\left(3t^{1/2}\right)-\mathrm{E}_{1/2}\left(t^{1/2}\right)\right]-t\mathrm{E}_1\left(t\right)-t^{3/2}\mathrm{E}_{1,3/2}\left(t\right)-\frac{t^{1/2}}{\Gamma(1/2)}$$

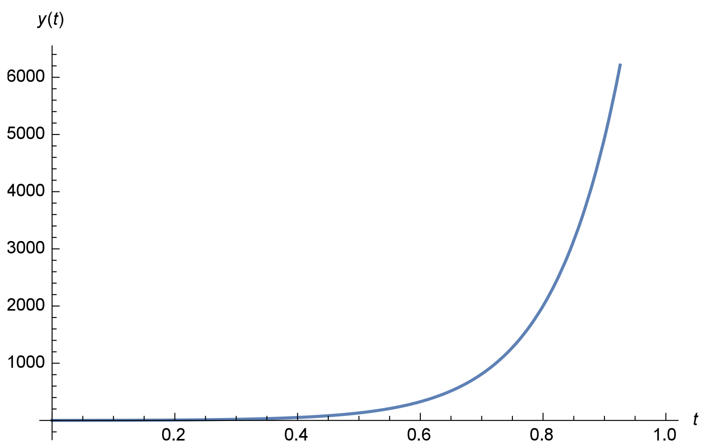


Figura 3.6: Gráfica de la solución de $[D^{\frac{3}{2}}-5D+7D^{\frac{1}{2}}-3]y(t)=0$, en términos de la función de Mittag-Leffler de un parámetro.

Otra solución para (3.5.26) en términos de la función de Mittag-Leffler de dos parámetros, es

$$y(t) = \frac{3}{4}\left[\mathrm{E}_{1,1}\left(9t\right) + 3t^{1/2}\mathrm{E}_{1,3/2}\left(9t\right)\right] - \left(t + \frac{3}{4}\right)\left[\mathrm{E}_{1,1}\left(t\right) + t^{1/2}\mathrm{E}_{1,3/2}\left(t\right)\right] - \frac{t^{1/2}}{\Gamma(1/2)}.$$

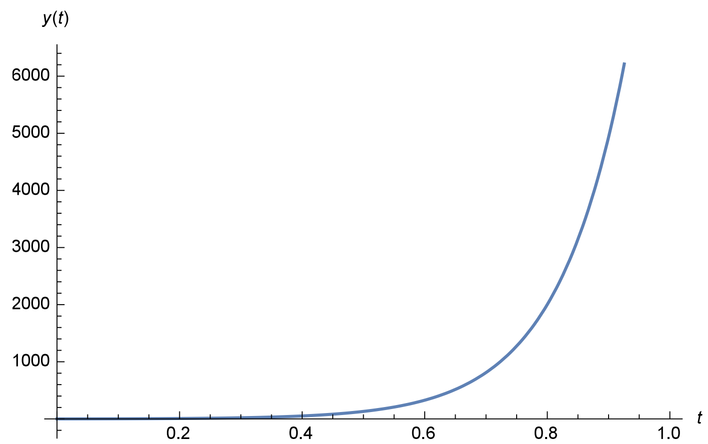


Figura 3.7: Gráfica de la solución de $[D^{\frac{3}{2}} - 5D + 7D^{\frac{1}{2}} - 3]y(t) = 0$, en términos de la función de Mittag-Leffler de dos parámetros.

Anexos

Wolfram Mathematica 10.0

Aquí se muestra un pequeño programa para calcular la integral fraccionaria

In[1]:= $\texttt{integralfrac}[\texttt{f\_}, \alpha\_, \texttt{a\_}, \texttt{x\_}] := \texttt{Module}[\{g\},$

$g[\texttt{t\_}] := f/.x \to t;$

$\frac{1}{\texttt{Gamma}[\alpha]} \texttt{Integrate}\left[(x-t)^{\alpha-1} g[t], \{t, a, x\}\right]\Big]$

Wolfram Mathematica 10.0

Aquí se muestra un pequeño programa para calcular la derivada fraccionaria

In[2]:= $\texttt{derivadafrac}[\texttt{f\_}, \alpha\_, \texttt{a\_}, \texttt{x\_}] := \texttt{Module}[\{g, n\},$

$g[\texttt{t\_}] := f/.x \to t;$

$n = \texttt{Floor}[\alpha] + 1;$

$\frac{1}{\texttt{Gamma}[n-\alpha]} D\left[\texttt{Integrate}\left[(x-t)^{n-\alpha-1} g[t], \{t, a, x\}\right], \{x, n\}\right]\Big]$

Wolfram Mathematica 10.0

La integral fraccionaria de x^3 de orden $1/9$

In[3]:= $\texttt{integralfrac}\left[x^3, 1/9, 0, x\right] \texttt{//FullSimplify}$

Out[3]= ConditionalExpression $\left[\frac{19683x^{28/9}}{2660\text{Gamma}\left[\frac{1}{9}\right]}, \text{Re}[x] > 0\&\&\text{Im}[x] == 0\right]$

Wolfram Mathematica 10.0

La derivada fraccionaria de x^3 de orden $1/2$

In[4]:= **derivadafrac** $[x^3, 1/2, 0, x]$ **//FullSimplify**

Out[4]= ConditionalExpression $\left[\frac{16x^{5/2}}{5\sqrt{\pi}}, \text{Re}[x] > 0\&\&\text{Im}[x] == 0\right]$

Wolfram Mathematica 10.0

La derivada fraccionaria de $(x-2)^3$ de orden $1/3$

In[5]:= **derivadafrac** $[(x-2)^3, 1/3, 2, x]$ **//FullSimplify**

Out[5]= ConditionalExpression $\left[\frac{81(-2+x)^{8/3}}{40\text{Gamma}\left[\frac{2}{3}\right]}, \text{Re}[x] > 2\&\&\text{Im}[x] == 0\right]$

Wolfram Mathematica 10.0

La derivada fraccionaria de $Log[x]$ de orden $1/5$

In[6]:= **derivadafrac**$[\text{Log}[x], 1/5, 0, x]$**//FullSimplify**

Out[6]= ConditionalExpression $\left[\frac{-2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\pi+10\sqrt{5}\text{ArcCoth}\left[\sqrt{5}\right]+25\text{Log}[5]+20\text{Log}[x]}{20x^{1/5}\text{Gamma}\left[\frac{4}{5}\right]},\right.$

$\left.\text{Re}[x] > 0\&\&\ x == \text{Re}[x]\right]$

Wolfram Mathematica 10.0

La integral fraccionaria de $Log[x]$ de orden $1/2$

In[7]:= **integralfrac[Log[x], 1/2, 0, x]//FullSimplify**

Out[7]= ConditionalExpression $\left[\frac{2\sqrt{x}(-2+\text{Log}[4]+\text{Log}[x])}{\sqrt{\pi}}, \text{Re}[x] > 0\&\&\text{Im}[x] == 0\right]$

Wolfram Mathematica 10.0

La integral fraccionaria de $\sin[\lambda x]$ de orden $1/2$

In[8]:= $\frac{1}{\textbf{Gamma}[1/2]} * \int_0^x t^{1/2-1} * \textbf{Sin}[\lambda(x-t)]dt\textbf{//FullSimplify}$

Out[8]= $\frac{\sqrt{2}\left(-\text{Cos}[x\lambda]\text{FresnelS}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{x}\sqrt{\lambda}\right]+\text{FresnelC}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{x}\sqrt{\lambda}\right]\text{Sin}[x\lambda]\right)}{\sqrt{\lambda}}$

Wolfram Mathematica 10.0

La integral fraccionaria de $\cos[\lambda x]$ de orden $1/2$

In[9]:= $\frac{1}{\textbf{Gamma}[1/2]} * \int_0^x t^{1/2-1} * \textbf{Cos}[\lambda(x-t)]dt\textbf{//FullSimplify}$

Out[9]= $\frac{\sqrt{2}\left(\text{Cos}[x\lambda]\text{FresnelC}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{x}\sqrt{\lambda}\right]+\text{FresnelS}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{x}\sqrt{\lambda}\right]\text{Sin}[x\lambda]\right)}{\sqrt{\lambda}}$

Conclusiones

1. La integral fraccionaria se puede expresar como una **integral de Riemann-Stieltjes**:

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \int_0^x f(t)dg(t). $$

2. La derivada fraccionaria de una constante no es igual a cero.

3. La única clase de ecuaciones en la cual podemos encontrar una solución explicita sin hacer mucho esfuerzo es el tipo de ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes(o ecuaciones reducidas a esta forma).

4. Uno de los métodos más sencillos para resolver una ecuación diferencial fraccionaria es utilizando la transformada de Laplace.

5. Las funciones especiales $\mathrm{E}_\alpha(t)$, $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(t)$ y $\mathscr{E}_t(v,a)$ resultan muy útiles en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, haciendo uso de la transformada de Laplace.

6. El software científico Mathematica es una excelente herramienta para obtener resultados de la integral y derivada fraccionaria con un mínimo costo de tiempo.

Recomendaciones

1. Se recomienda hacer una investigación para las ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales con coeficientes variables.

2. También hacer una investigación para las ecuaciones integrales fraccionarias.

3. Trabajar en conjunto con profesionales (estudiantes y/o graduados) de carreras afines al tema de investigación; en soluciones de diferentes problemas aplicados que aparecen en física, química, electroquímica, ingeniería, etc.

Referencias Bibliográficas

Baleanu, D., Güvenç, Z. B., y Machado, J. T. (2010). *New trends in nanotechnology and fractional calculus applications*. Springer.

Das, S. (2011). *Functional fractional calculus*. Springer Science & Business Media.

Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of caputo type*. Springer.

Hilfer, R. (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific.

Kilbas, A., Srivastava, H., y Trujillo, J. (2006). New book: "theory and applications of fractional differential equations", elsevier, north-holland mathematics studies, 204. *FRACTIONAL CALCULUS AND APPLIED ANALYSIS*, *9*, 71.

Mainardi, F. (2010). *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. World Scientific.

Mathai, A. M., y Haubold, H. J. (2008). *Special functions for applied scientists*. Springer.

Miller, K. S., y Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.

Nagle, R. K., Saff, E. B., y Snider, A. D. (2001). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación.

Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* (Vol. 198). Academic press.

Podlubny, I. (2001). Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *arXiv preprint math/0110241*.

Rodríguez, J. P. A. (2010). Una generalización de la integral y derivada de orden entero a orden arbitrario. *http://www.bibliotecas.unitru.edu.pe/index.php, 2010.*.

Rodríguez, J. P. A. (2013). Existência e unicidade das equações diferenciais fracionárias.

Ross, B. (1975). Fractional calculus and its applications.

Rudin, W. (1976). Principles of mathematical analysis (international series in pure & applied mathematics).

Rudin, W. (1986). *Real and complex analysis (3rd).* New York: McGraw-Hill Inc.

Sabatier, J., Agrawal, O. P., y Machado, J. T. (2007). *Advances in fractional calculus* (Vol. 4). Springer.

Schiff, J. L. (2013). *The laplace transform: theory and applications*. Springer Science & Business Media.

Spiegel, M. R., y García, H. R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. Prentice Hall.

Yong, Z., Jinrong, W., y Lu, Z. (2016). *Basic theory of fractional differential equations*. World Scientific.